Session 2009

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

« COMPTABILITÉ ET GESTION DES ORGANISATIONS »

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 2 heures

Coefficient : 2

Matériel et documents autorisés :

L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 6 pages, numérotées de 1/6 à 6/6.
La page 6/6 est une annexe à rendre avec la copie.

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.
Il comprend 2 pages numérotées 1 et 2.

EXERCICE 1 (10 points)

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Une entreprise réalise et commercialise des compositions florales ainsi que des produits pour le jardin.

A. Événements indépendants

Dans cette partie, on demande les valeurs exactes des probabilités.

L'entreprise confectionne ses compositions florales avec des bulbes de fleurs qu'elle reçoit en grande quantité. Chaque bulbe peut présenter deux défauts que l'on désigne par défaut a et défaut b.
On prélève un bulbe au hasard dans un stock important.
On note A l'événement : « le bulbe présente le défaut a » et on note B l'événement : « le bulbe présente le défaut b ».
On admet que les probabilités des événements A et B sont $P(A) = 0{,}015$ et $P(B) = 0{,}02$.
On suppose que les deux événements A et B sont indépendants.

1° Calculer la probabilité de l'événement E_1 : « le bulbe présente le défaut a et le défaut b ».

2° Calculer la probabilité de l'événement E_2 : « le bulbe présente au moins un des deux défauts ».

3° Calculer la probabilité de l'événement E_3 : « le bulbe ne présente aucun des deux défauts».

Dans ce qui suit, tous les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

B. Loi binomiale

On s'intéresse à une livraison importante de compositions florales d'un certain type, destinée à une chaîne d'hypermarchés.
On note D l'événement : « une composition florale prélevée au hasard dans la livraison est défectueuse ».
On suppose que $P(D) = 0{,}025$.
On prélève au hasard 12 compositions dans la livraison pour vérification. La livraison contient assez de compositions pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 12 compositions.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de compositions de ce prélèvement qui sont défectueuses.

1° Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2° Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait exactement deux compositions défectueuses.

3° Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait au plus une composition défectueuse.

C. Loi normale et somme de variables indépendantes

L'entreprise commercialise deux types d'engrais : le type C_1, en poudre, et le type C_2, en granulés.

1° On note X_1 la variable aléatoire qui, à toute semaine prise au hasard pendant une année, associe la demande en kilogrammes d'engrais de type C_1 pour cette semaine.
On suppose que la variable aléatoire X_1 suit la loi normale de moyenne 160 et d'écart type 32.
Calculer $P(X_1 \leq 200)$.

2° On note X_2 la variable aléatoire qui, à toute semaine prise au hasard pendant une année, associe la demande en kilogrammes d'engrais de type C_2 pour cette semaine.
On suppose que la variable aléatoire X_2 suit la loi normale de moyenne 77 et d'écart type 28.
On note Y la variable aléatoire qui, à toute semaine prise au hasard pendant une année, associe la demande totale en kilogrammes d'engrais de type C_1 et de type C_2 pour cette semaine.
On a $Y = X_1 + X_2$.
On suppose que les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes.
On admet que Y suit une loi normale de moyenne m et d'écart type σ.

a) Justifier que $m = 237$ et qu'une valeur approchée de σ arrondie à 10^{-2} est 42,52.

b) Calculer la probabilité $P(Y \geq 340)$.

c) Le coût de stockage de cet engrais est élevé. L'entreprise a-t-elle raison de limiter la production totale hebdomadaire de cet engrais à 340 kilogrammes ?

EXERCICE 2 (10 points)

A. Résolution graphique d'une inéquation

Soit f la fonction définie sur [1, 10] par $f(x) = \dfrac{10}{\ln(2x+3)}$.

La courbe représentative C de la fonction f dans un repère orthonormal est tracée sur **l'annexe à rendre avec la copie**.
Résoudre graphiquement dans [1, 10] l'inéquation $f(x) \leq 3{,}5$.
Faire apparaître sur la figure les constructions utiles.

B. Étude d'une fonction

Soit g la fonction définie sur [0, 10] par $g(x) = 5 - \mathrm{e}^{-0{,}2x+1}$.

1° a) Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x de [1, 10].
b) Étudier le signe de $g'(x)$ sur [1, 10].

2° Donner la tableau de variation de g sur [1, 10].

3° a) Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-2}.

x	1	2	3	4	5	6	8	10
$g(x)$				3,78	4			

b) Tracer la courbe représentative Γ de g sur **l'annexe à rendre avec la copie**, dans le même repère que la courbe C.

4° Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$, où f est la fonction définie dans la partie A. Faire apparaître sur la figure les constructions utiles.

C. Calcul intégral

1° Soit G la fonction définie sur [1, 10] par $G(x) = 5x + 5\,\mathrm{e}^{-0{,}2x+1}$.
Démontrer que la fonction G est une primitive sur [1, 10] de la fonction g définie au début de la partie B.

2° a) Démontrer que la valeur moyenne de la fonction g sur [1, 10] est :

$$V_m = \frac{45 + 5\mathrm{e}^{-1} - 5\mathrm{e}^{0{,}8}}{9}.$$

b) Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de V_m.

D. Application des parties A et B

On considère un produit dont le prix de la tonne, exprimé en dizaines d'euros, est noté x.
La ***demande***, $d(x)$, est la quantité de ce produit, exprimée en milliers de tonnes, que les consommateurs sont prêts à acheter au prix de x dizaines d'euros la tonne.
L'***offre***, $o(x)$, est la quantité de ce produit, exprimée en milliers de tonnes, que les producteurs sont prêts à vendre au prix de x dizaines d'euros la tonne.
On appelle ***prix d'équilibre*** de ce produit le prix pour lequel l'offre et la demande sont égales.
On admet que, pour un prix du produit de x dizaines d'euros la tonne, avec $1 \leq x \leq 10$, la demande est $d(x) = f(x)$ et l'offre est $o(x) = g(x)$, où f et g sont les fonctions définies dans les parties A et B.

1° En utilisant un résultat de la partie A ou de la partie B, indiquer à partir de quel prix de la tonne, en euros, la demande est inférieure ou égale à 3500 tonnes.

2° a) Déduire d'un résultat de la partie B une valeur approchée du prix d'équilibre en euros.

b) Donner une valeur approchée de la demande correspondant au prix d'équilibre.