0.1 ÉTUDE DE SIGNE DES FONCTIONS

1°) Étudier le signe de la fonction dérivée : f'(x) = ln(x) - 3

ln(x) est définie sur x > 0 soit D_f =] 0 ; ∞[

f'(x) ≥ 0 ⇔ ln(x) - 3 ≥ 0 ⇔ ln(x) ≥ 3 ⇔ $e^{ln(x)} \geq e^3$ ⇔ x ≥ e^3 par conséquent :

f'(x) ≤ 0 ⇔ x ≤ e^3

x	0		e^3		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|$	↘		↗	

2°) Étudier le signe de la fonction dérivée : f'(x) = (1 - ln(x)) (ln(x) + 3)

Chaque fois qu'il y a a un produit de facteurs, il faut étudier séparemment le signe de chaque facteur et on dressera le tableau de signes.

La fonction ln est définie sur]0 ; ∞ [

a) 1 - ln x ≥ 0 ⇔ 1 ≥ ln x ⇔ $e^1 \geq e^{ln(x)}$ ⇔ e ≥ x ou x ≤ e

b) ln(x) + 3 ≥ 0 ⇔ ln(x) ≥ -3 ⇔ $e^{ln(x)} \geq e^{-3}$ ⇔ x ≥ e^{-3}

x	0		e^{-3}		e	
$1 - ln(x)$	$\|$	$+$		$+$	0	$-$
$ln(x) - 3$	$\|$	$-$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\|$	↘		↗		↘

3°) Étudier le signe de la fonction dérivée : f'(x) = $e^{0,5x+1}$

L'exponentielle est définie sur ℝ soit D_f =] -∞ ; ∞[

$e^{0,5x+1} \geq 0 \; \forall$ x

4°) Étudier le signe de la fonction dérivée : f'(x) = $e^{-0,2x+1}$ - 2

L'exponentielle est définie sur ℝ soit D_f =] -∞ ; ∞[

a) f'(x) ≥ 0 ⇔ $e^{-0,2x+1}$ - 2 ≥ 0 ⇔ $e^{-0,2x+1}$ ≥ 2 ⇔ ln [$e^{-0,2x+1}$] ≥ ln (2) ⇔ - 0,2x + 1 ≥ ln (2)

- 0,2x ≥ ln(2) - 1 ⇔ 0,2x ≤ - ln(2) + 1 ⇔ x ≤ $\frac{-ln(2)+1}{0,2}$ soit

x ≤ $\frac{-ln(2)+1}{0,2}$ ⇔ x ≤ 5 - 5ln(2) *car* diviser par 0,2 ou $\frac{2}{10}$ ou $\frac{1}{5}$ c'est multiplier par l'inverse de la fraction

b) f'(x) ≤ 0 ⇔ x ≥ 5 - 5ln(2)

0.2 EXERCICES SUR DÉRIVÉES

5°) Dérivation d'un quotient : $(\frac{U}{V})$' $=\frac{U'V-V'U}{V^2}$
$\left(\frac{e^x}{2x+3} \right)' = \frac{e^x(2x+3)-2e^x}{(2x+3)^2} = \frac{e^x(2x+3-2)}{(2x+3)^2} = \frac{e^x(2x+1)}{(2x+3)^2}$

6°) Dérivation d'un quotient : $\left(\frac{1}{w} \right)$'
de la forme : $(\frac{U}{V})$' $=\frac{U'V-V'U}{V^2}$ en posant U = 1 et V = W soit
$\left(\frac{1}{w} \right)' = \frac{-V'}{V^2}$ car la dérivée U' = 0 par conséquent $\left(\frac{1}{w} \right)' = \frac{-W'}{W^2}$
de même $\left(\frac{1}{U} \right)' = \frac{-u'}{u^2}$

7°) Dérivation d'un quotient : $\left(\frac{1}{5x+7} \right)$'
$\left(\frac{1}{5x+7} \right)' = \frac{-5}{(5x+7)^2}$

8°) Dérivation d'un quotient : $\left(\frac{1}{e^x+5} \right)$'
$\left(\frac{1}{e^x+5} \right)' = \frac{-e^x}{(e^x+5)^2}$

9°) Dérivation d'un quotient : $\left(\frac{-3}{5x+7} \right)$'
$\left(\frac{-3}{5x+7} \right)' = \frac{15}{(5x+7)^2}$

10°) Dérivation d'un quotient : $\left(\frac{2}{e^x+5} \right)$'
$\left(\frac{2}{e^x+5} \right)' = \frac{-2e^x}{(e^x+5)^2}$ 11°) Dérivation d'un quotient : $\left(\frac{-3}{x^2+1} \right)$'

$\left(\frac{-3}{x^2+1} \right)' = \frac{-3(-2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{6x}{(x^2+1)^2}$

12°) Dériver la fonction : f(x) = $\frac{1}{1+99e^{-0,26x}}$
de la forme $\left(\frac{1}{U} \right)' = \frac{-u'}{u^2}$;
Posons : u(x) = 1 + 99e$^{-0,26x}$ $\Rightarrow$ u'(x) = -0,26 * 99e$^{-0,26x}$ car e^{v} = v'e^{v}
f'(x) = $\frac{-(-0,26(99e^{-0,26x})}{(1+99e^{-0,26x})^2} = \frac{25,74e^{-0,26x}}{(1+99e^{-0,26x})^2}$

0.3 CORRIGÉ BTS CGO 2003

PARTIE A

13°) Soit f(t) = 6 - $\frac{9}{t+2}$ et g(t) = $\frac{21}{5+e^{-0,8t}}$ les fonctions définies sur l'intervalle [1 ; 6].
Calculer la dérivée de f(t), étudier le sens de variation de f(t).
Posons u(t) = t + 2 $\Rightarrow$ u'(t) = 1
f(t) est de la forme : 6 - $\frac{9}{u}$ $\Rightarrow$ f'(t) = $\frac{-(-9u')}{u^2} = \frac{9u'}{u^2}$ $\Rightarrow$ f'(t) = $\frac{9}{(t+2)^2}$
Sur l'intervalle [1 ; 6] f'(t) = $\frac{9}{(t+2)^2} > 0$ car numérateur positif et dénominateur positif car un carré.
On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle [1 ; 6].

14°) Calculer la dérivée de g(t), étudier le sens de variation de g
g(t) = $\frac{21}{5+e^{-0,8t}}$

Posons u(t) = 5 + $e^{-0,8t}$ ⇒ u'(x) = -$0,8^{-0,8t}$ car e^v = v'e^v

g(t) est de la forme : $\frac{21}{u}$ ⇒ g'(t) = $\frac{-21u'}{u^2}$ ⇒ g'(t) = $\frac{-21(-0,8e^{-0,8t})}{(5+e^{-0,8t})^2} = \frac{16,8e^{-0,8t})}{(5+e^{-0,8t})^2}$

Sur l'intervalle [1 ; 6] g'(t) =$\frac{16,8e^{-0,8t})}{(5+e^{-0,8t})^2} > 0$ car numérateur positif (l'exponentielle est toujours positive) et dénominateur positif car un carré. On en déduit que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle [1 ; 6].

15°) Calculons g(t) ≥ 4,15 à 10^{-2} près de la borne inférieure.

$\frac{21}{5+e^{-0,8t}} \geq 4,15 \Leftrightarrow 21 \geq 4,15(5 + e^{-0,8t}) \Leftrightarrow \frac{21}{4,15} \geq (5 + e^{-0,8t}) \Leftrightarrow \frac{21}{4,15} - 5 \geq e^{-0,8t}$

$\ln(\frac{21}{4,15} - 5) \geq \ln e^{-0,8t} \Leftrightarrow \ln(\frac{21}{4,15} - 5) \geq - 0,8t \Leftrightarrow t \geq \frac{ln(\frac{21}{4,15}-5)}{-0,8}$

t > 3,51

S = [3,51 ; 6]

16°) Donner une primitive de f(t) = 6 - $\frac{9}{t+2}$ sur l'intervalle [1 ; 6].

f(t) = 6 -9($\frac{1}{t+2}$)

Posons u(t) = t + 2 ⇒ u'(t) = 1 ; $\frac{u'}{u} = \frac{1}{t+2}$;

f(t) = 6 -9($\frac{1}{t+2}$) de la forme 6 - 9($\frac{u'}{u}$)

Une primitive de $\frac{u'}{u}$ est ln |u| soit ln |t + 2|, mais sur l'intervalle [1 ; 6], t + 2 est > 0 donc ln |t + 2| = ln(t + 2) par conséquent :

F(t) = 6t - 9ln(t + 2)

17°) Montons que g(t) = $\frac{21}{5+e^{-0,8t}}$ peut s'écrire g(t) = $\frac{21e^{0,8t}}{5e^{0,8t}+1}$

rappel : e^x. e^y = e^{x+y}

Multiplions le numérateur et le dénominateur par $e^{0,8t}$

g(t) = $\frac{21e^{0,8t}}{(5+e^{-0,8t})e^{0,8t}} = \frac{21e^{0,8t}}{(5e^{0,8t}+e^{-0,8t}e^{0,8t})} = \frac{21e^{0,8t}}{(5e^{0,8t}+e^{-0,8t+0,8t})} = \frac{21e^{0,8t}}{(5e^{0,8t}+e^{0})} = \frac{21e^{0,8t}}{5e^{0,8t}+1}$

18°) Cherchons une primitive de g(t) = $\frac{21e^{0,8t}}{5e^{0,8t}+1}$

Cherchons une expression de la forme : k.$\frac{u'}{u}$ car on connaît une primitive qui est : k . ln|u|

Posons U(t) = 1 + 5$e^{0,8t}$ ⇒ u'(t) = 0,8(5$e^{0,8t}$) = 4$e^{0,8t}$

g(t) = $\frac{21}{4}$ ($\frac{4e^{0,8t}}{(5e^{0,8t}+1)}$)

Comme nous avons multiplié le numérateur par 4 multiplions le dénominateur par 4, ce qui ne change rien ! La primitive est donc :

G(t) = $\frac{21}{4}$ ln (5$e^{0,8t}$ + 1)

Cette primitive $\frac{21}{4}$ln(u) ne comporte pas les barres de valeur absolue car l'exponentielle (5$e^{0,8t}$ + 1) est toujours > 1.

19°) Calculons l'intégrale $\int_1^6 f(t)dt$ et $\int_1^6 g(t)dt$.

F(t) = 6t - 9ln(t + 2)

G(t) = $\frac{21}{4}$ ln (5$e^{0,8t}$ + 1)

$\int_1^6 f(t)dt$ = [6t - 9ln(t + 2) $]_1^6$ = F(6) - F(1) = [6*6 - 9ln8] - [6*1 - 9ln3] = 30 - 9ln8 + 9ln3

$= 30 + 9(\ln 3 - \ln 8) = 30 + 9 * \ln(\frac{3}{8})$ =21,17 à 10^{-2}

$\int_1^6 g(t)dt = [\ \frac{21}{4}\ \ln\ (5e^{0,8t}+1)\ ]_1^6 =$ F(6) - F(1) $= \frac{21}{4}[\ \ln\ (5e^{0,8*6}+1) - \ln\ (5e^{0,8}+1)]$
$= \frac{21}{4}[\ \ln\ (5e^{4,8}+1) - \ln\ (5e^{0,8}+1)] = \frac{21}{4}\ \ln(\ \frac{5e^{4,8}+1}{5e^{0,8}+1}) =$ 20,55 à 10^{-2}

0.4 CORRIGÉ BTS CGO 2004

20°) Montrons que $f(t) = \frac{1}{1+99e^{-0,26t}}$ peut s'écrire $\frac{e^{0,26t}}{e^{0,26t}+99}$

rappel : $e^x.\ e^y = e^{x+y}$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par $e^{0,26t}$

$f(t) = \frac{1}{1+99e^{-0,26t}} = \frac{1(e^{0,26t})}{(1+99e^{-0,26t})e^{0,26t}} = \frac{e^{0,26t}}{e^{0,26t}+99e^{-0,26t}e^{0,26t}} = \frac{e^{0,26t}}{e^{0,26t}+99e^{0}} = \frac{e^{0,26t}}{e^{0,26t}+99}$

21°) Cherchons une primitive de f(t) :

Cherchons une expression de la forme : $k.\frac{u'}{u}$ car on connaît une primitive qui est : k . ln|u|

Posons $U(t) = 99 + e^{0,26t} \Rightarrow u'(t) = 0,26e^{0,26t}$

$f(t) = \frac{1}{0,26} * \frac{0,26e^{0,26t}}{99+e^{0,26t}}$

Comme nous avons multiplié le numérateur par 0,26 multiplions le dénominateur par 0,26, ce qui ne change rien ! La primitive est donc :

$F(t) = \frac{1}{0,26} * \ln\ (99+e^{0,26t})$

Cette primitive $\frac{1}{0,26}\ln(u)$ ne comporte pas les barres de valeur absolue car l'exponentielle $(99+\ e^{0,26t})$ est toujours > 0.

22°) Cherchons la valeur moyenne sur l'intervalle [30 ; 40] de f(t)dt

$V_m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \Rightarrow V_m = \frac{1}{40-30}\int_{30}^{40} f(t)dt$

$V_m = \frac{1}{10}\ [\ F(t)\ ]_{30}^{40} = \frac{1}{10} * \frac{1}{0,26}\ [\ \ln(99+e^{0,26*40})\ ]_{30}^{40}$

$= \frac{1}{10} * \frac{1}{0,26}\ [ln(99+e^{0,26*40}) - ln(99+e^{0,26*30})] = \frac{1}{2,6}\ \ln(\ \frac{99+e^{10,4}}{99+e^{7,8}}\ )$