

Gestion de portefeuille

La démonstration du
modèle d'évaluation
des actifs financiers

MEDAF

Ou

CAPM

Capital asset pricing model

Plan du Cours

- Une preuve intéressante du MEDAF
- Faire quelques exemples

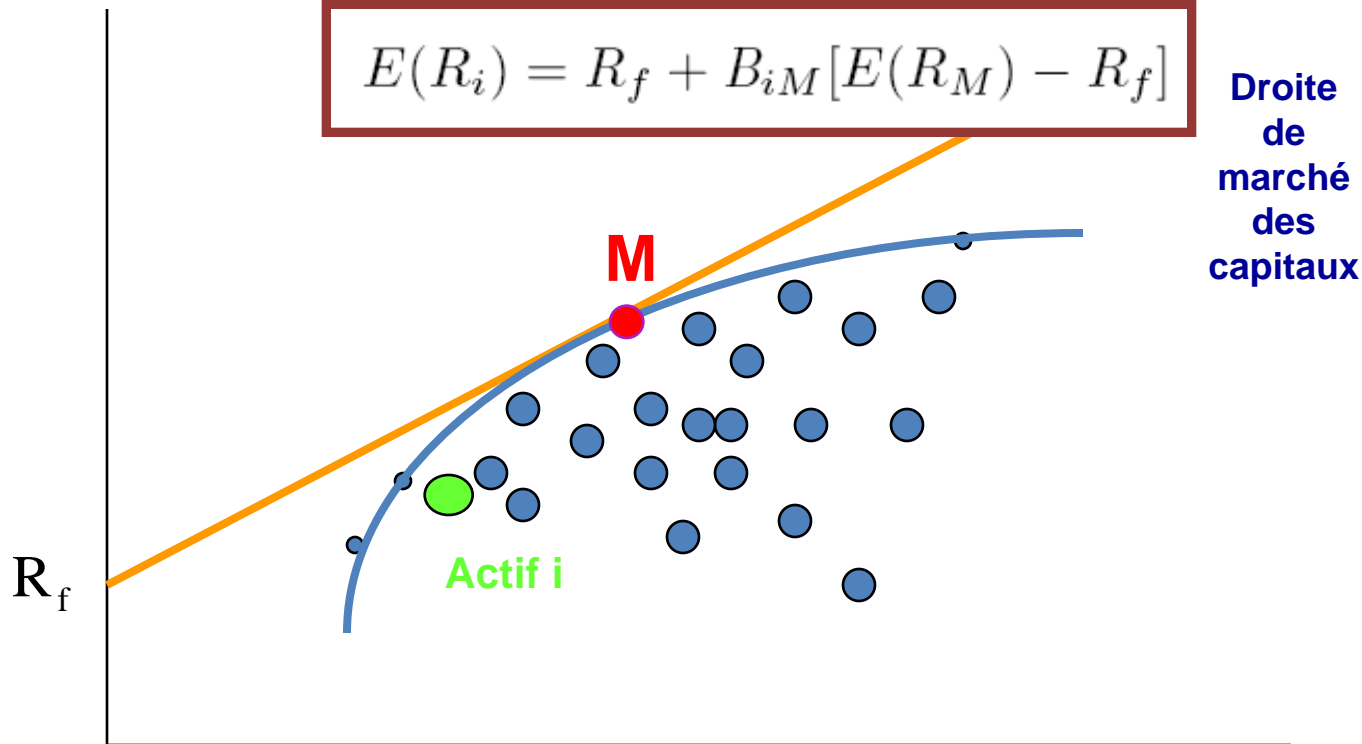
Une preuve intéressante du MEDAF

Le MEDAF dit :

Pour tout **actif i** que nous choisissons, l'espérance de rendement est donnée par :

$$E(R_i) = R_f + B_{iM}[E(R_M) - R_f]$$

$E(R_{\text{port}})$



CML

Droite
de
marché
des
capitaux

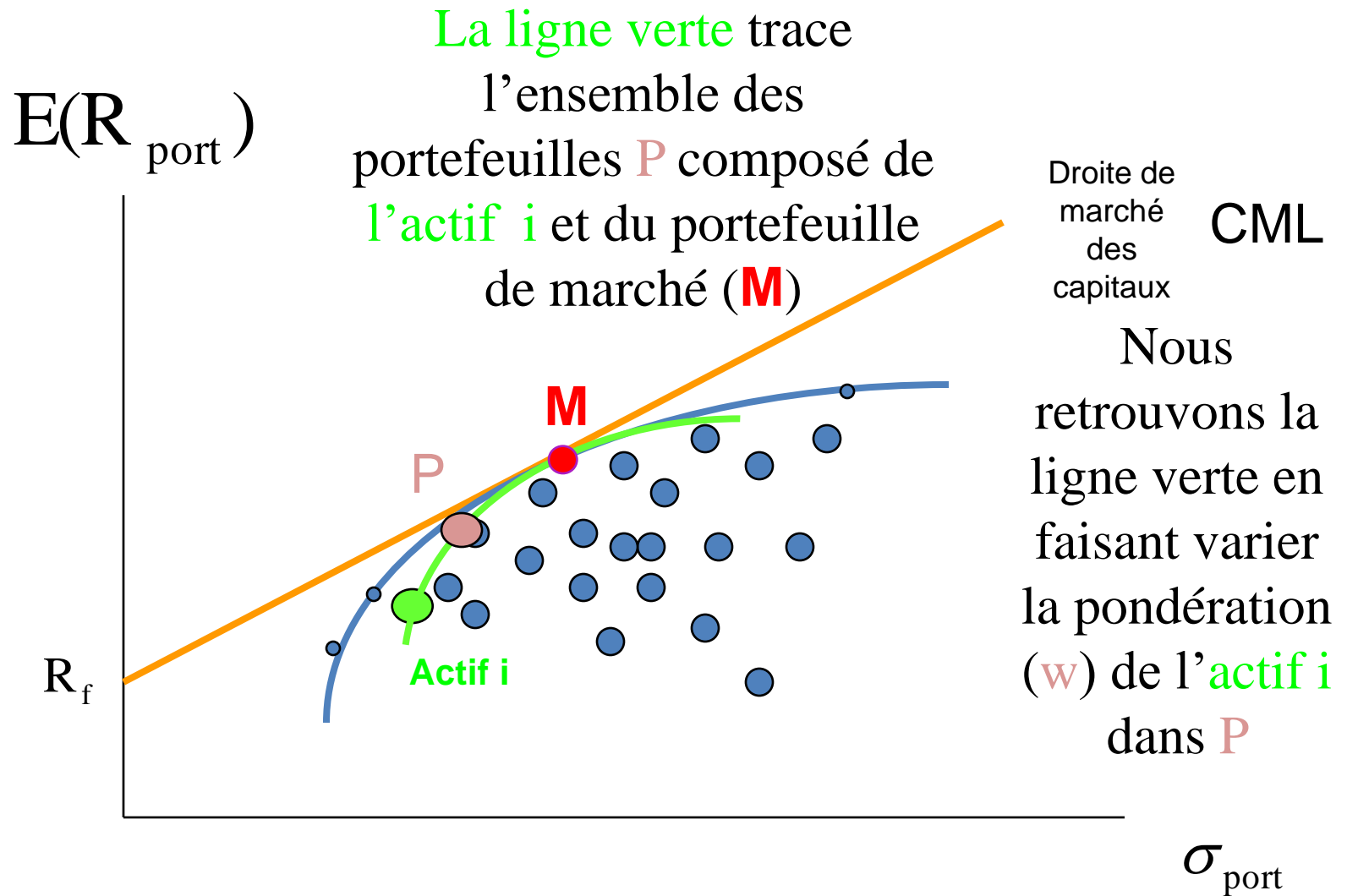
R_f

M

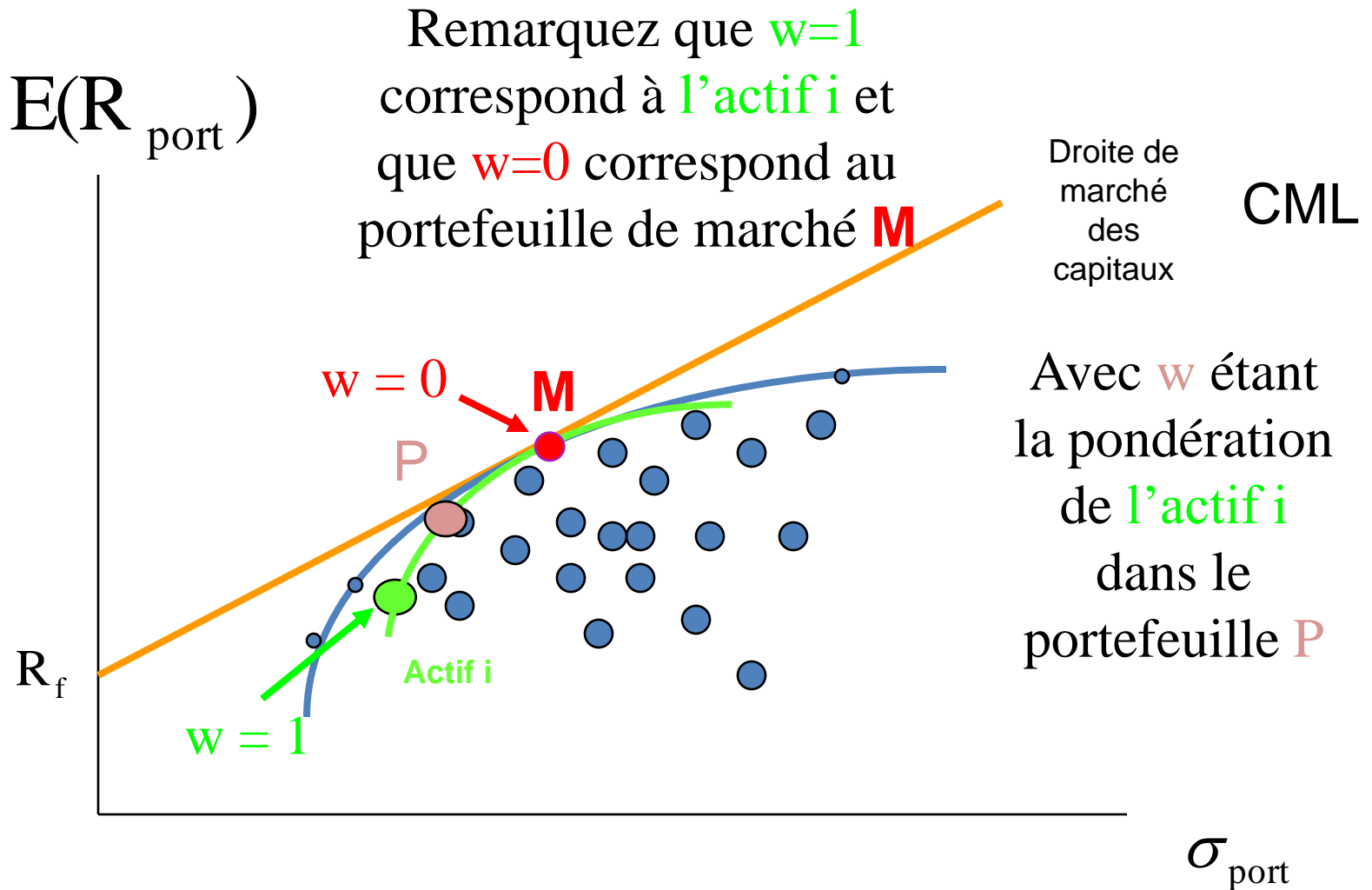
Actif i

σ_{port}

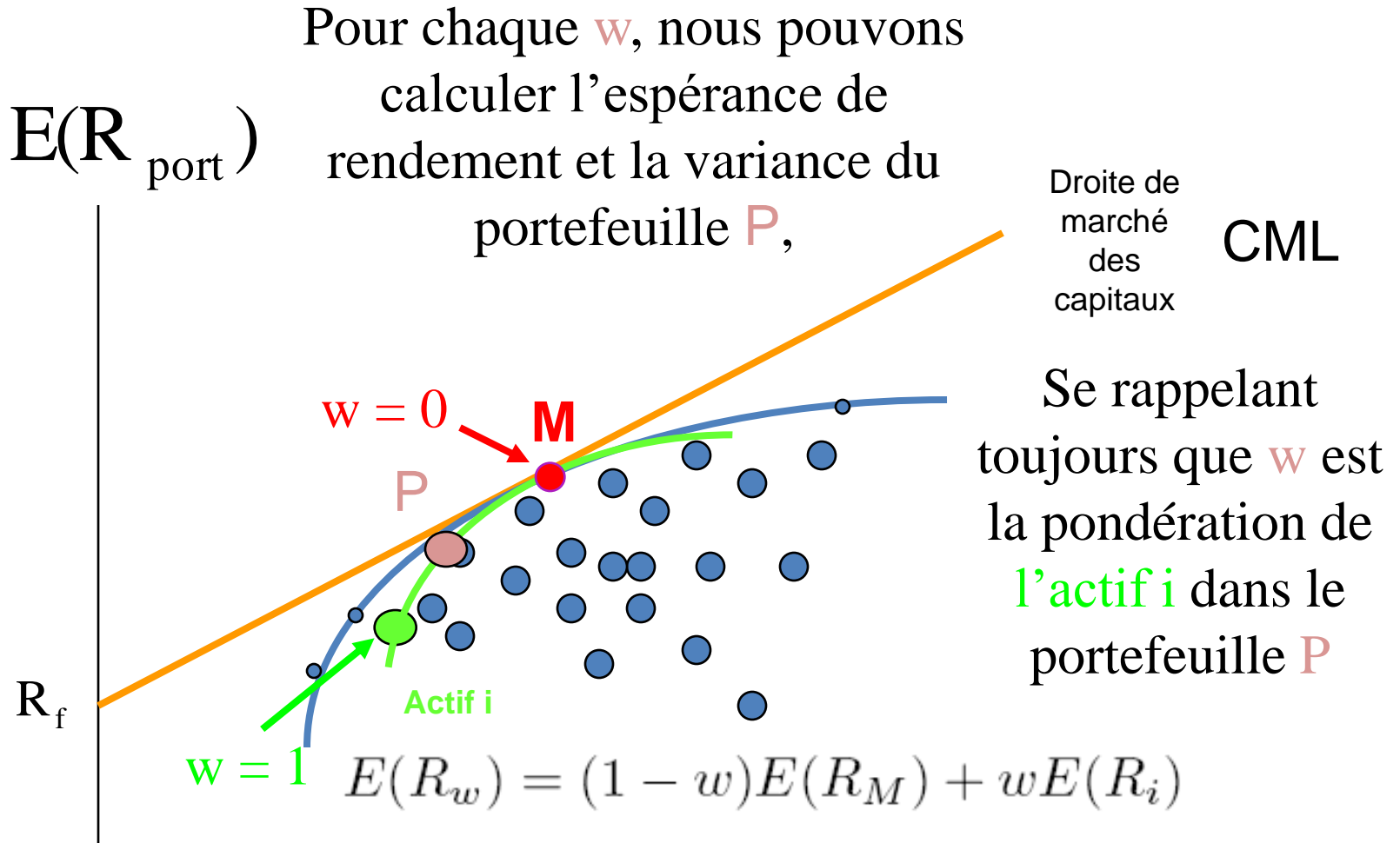
Pourquoi le MEDAF fonctionne-t-il ?



Pourquoi le MEDAF fonctionne-t-il ?

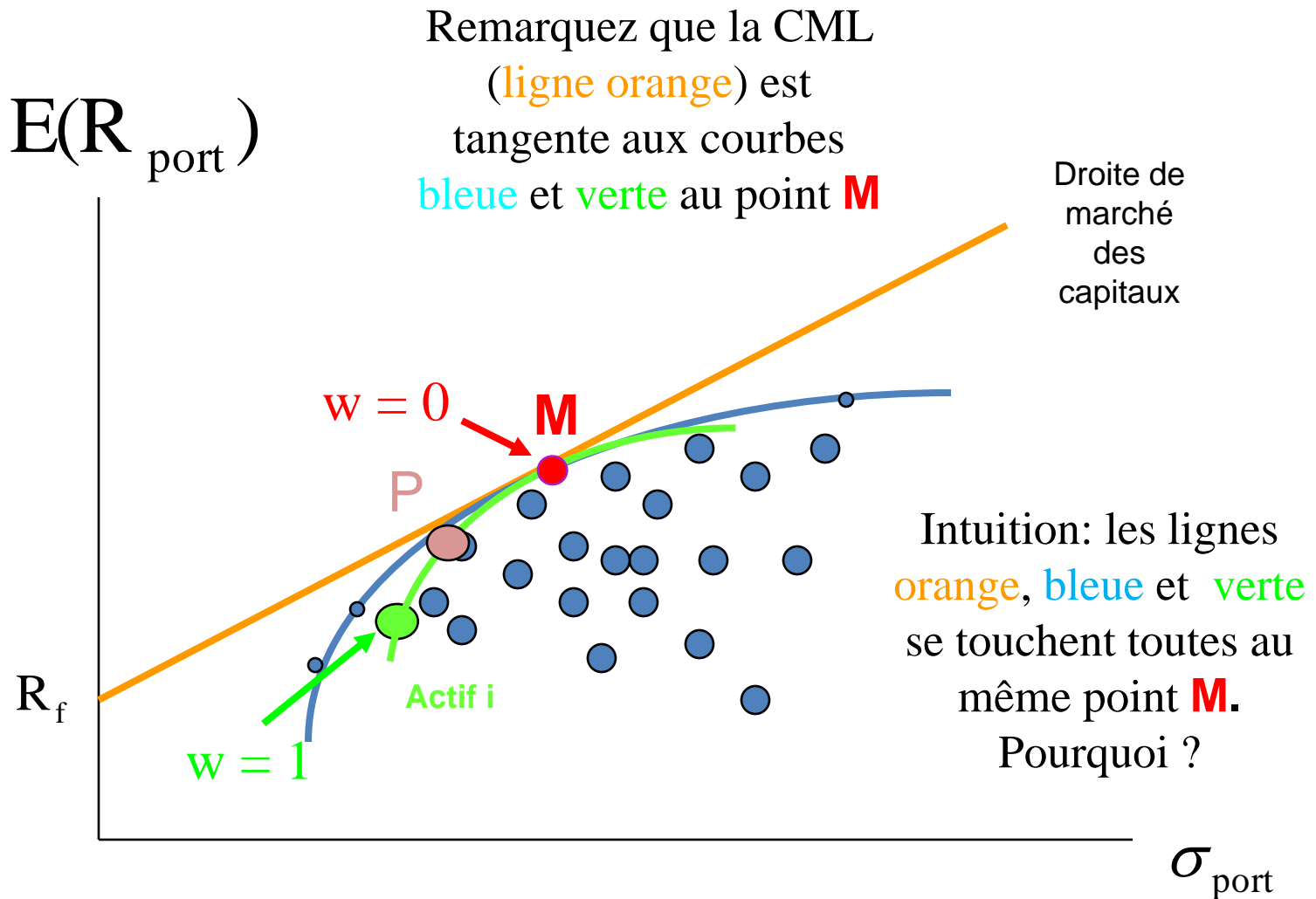


Pourquoi le MEDAF fonctionne-t-il ?

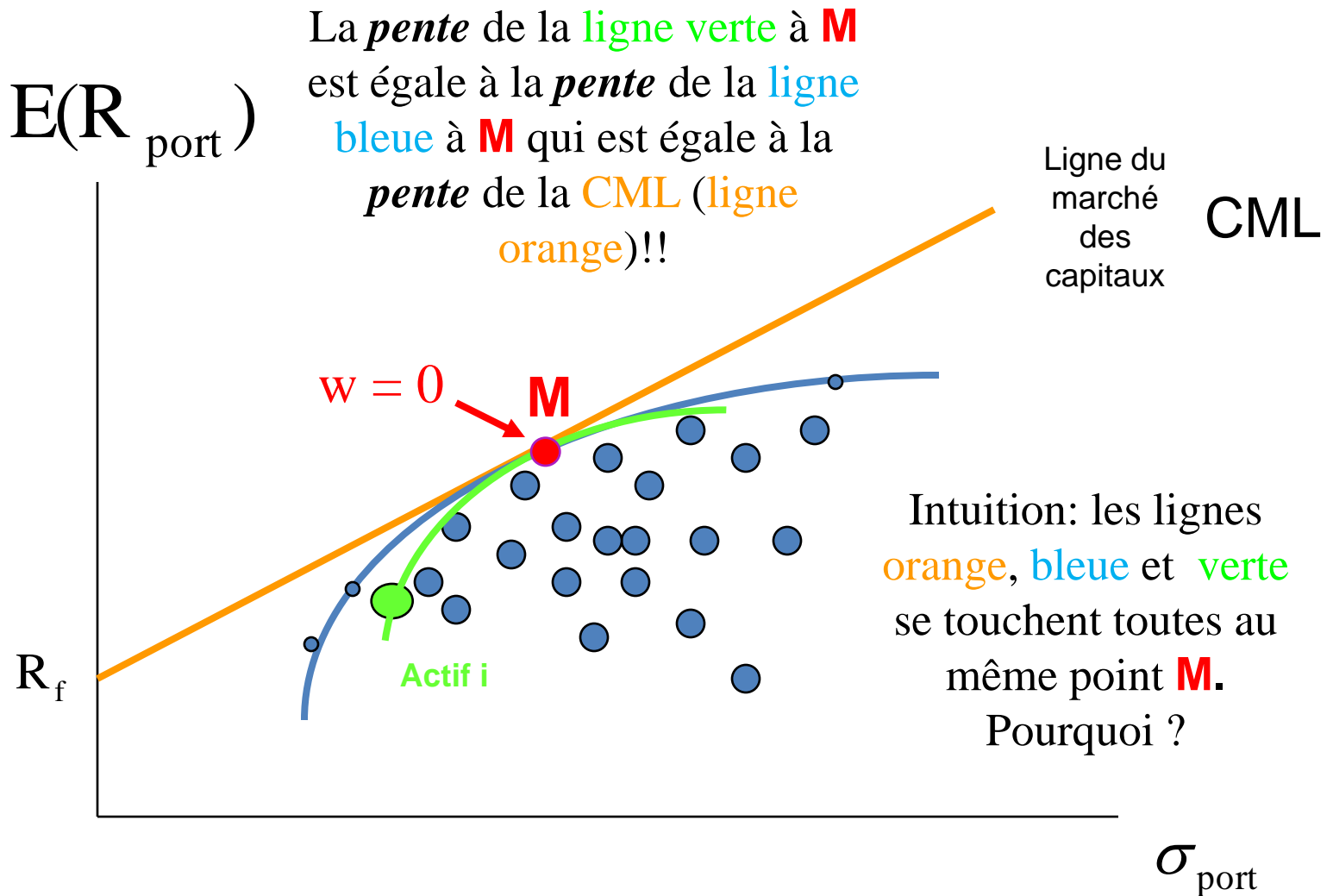


$$\sigma_w = [w^2\sigma_i^2 + (1 - w)^2\sigma_M^2 + 2w(1 - w)\sigma_{iM}]^{1/2}$$

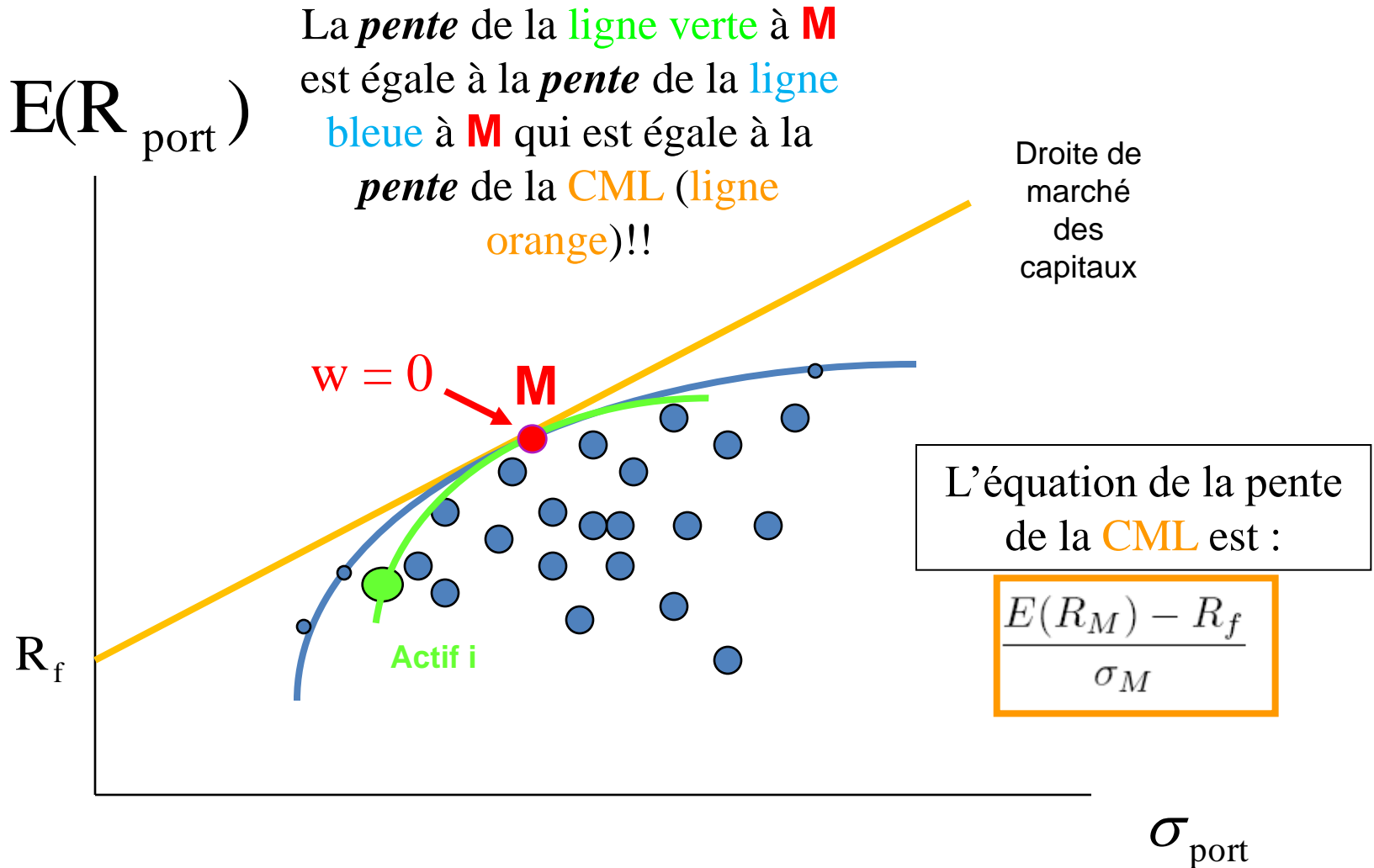
Pourquoi le MEDAF fonctionne-t-il ?



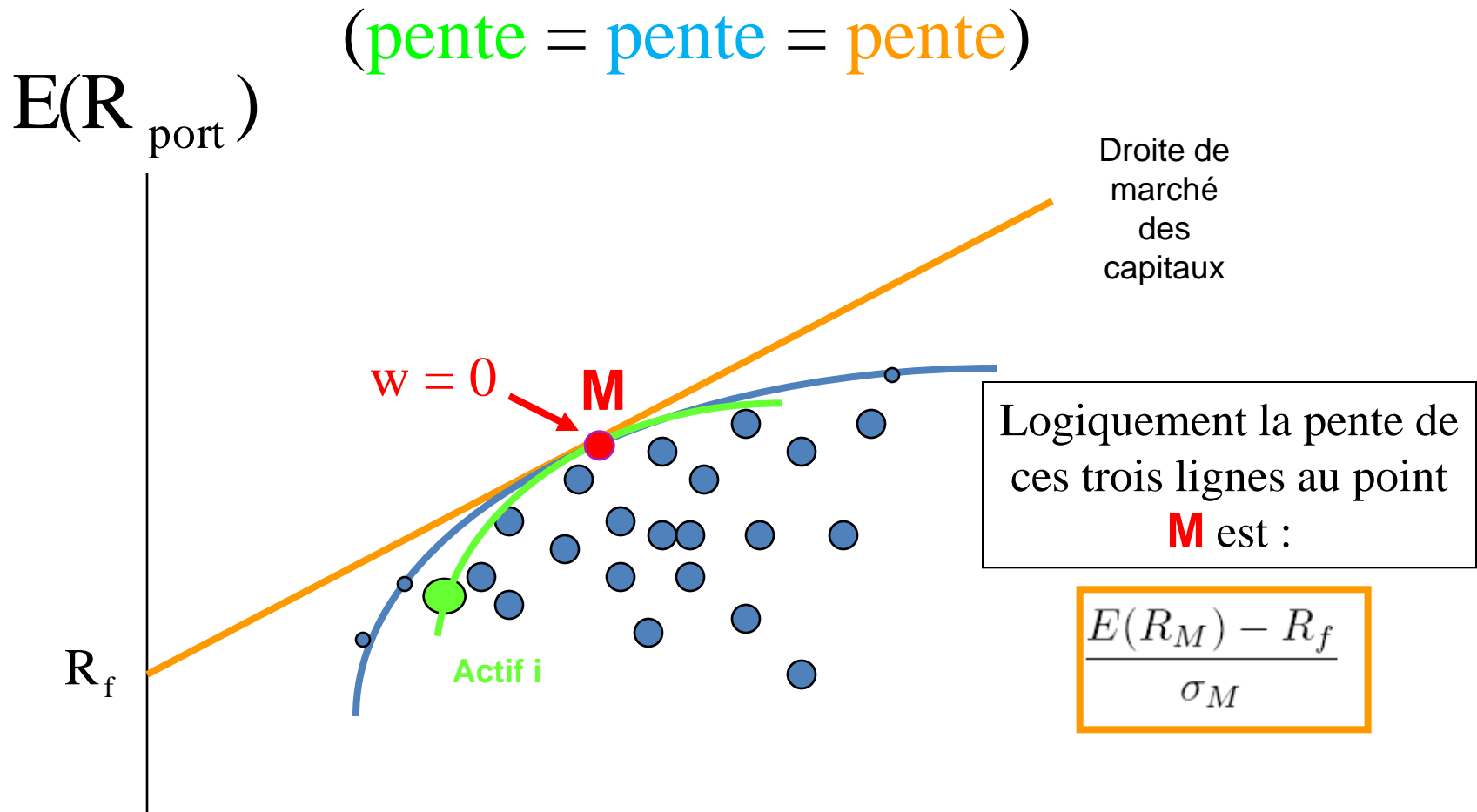
Pourquoi le MEDAF fonctionne-t-il ?



Pourquoi le MEDAF fonctionne-t-il ?

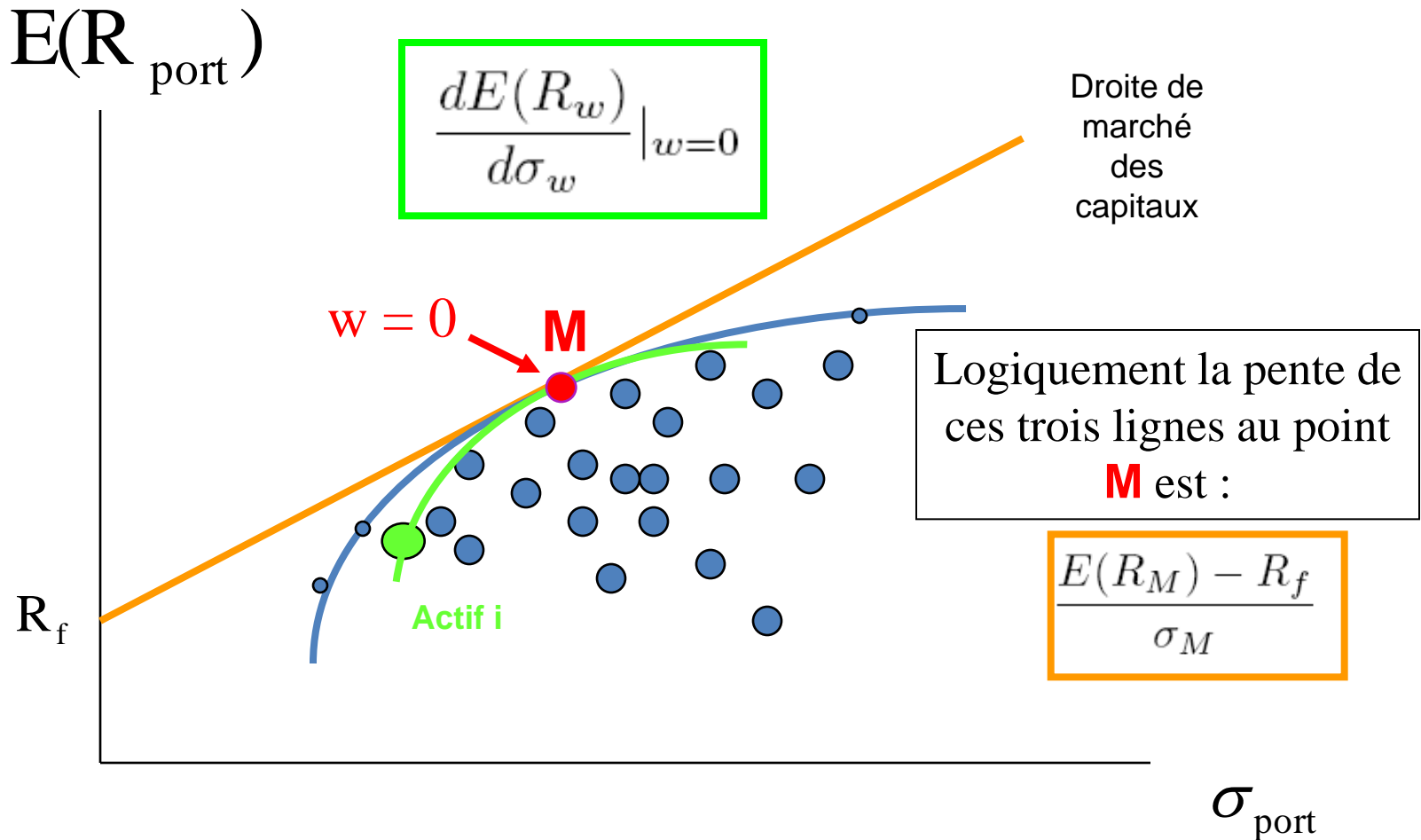


Pourquoi le MEDAF fonctionne-t-il ?



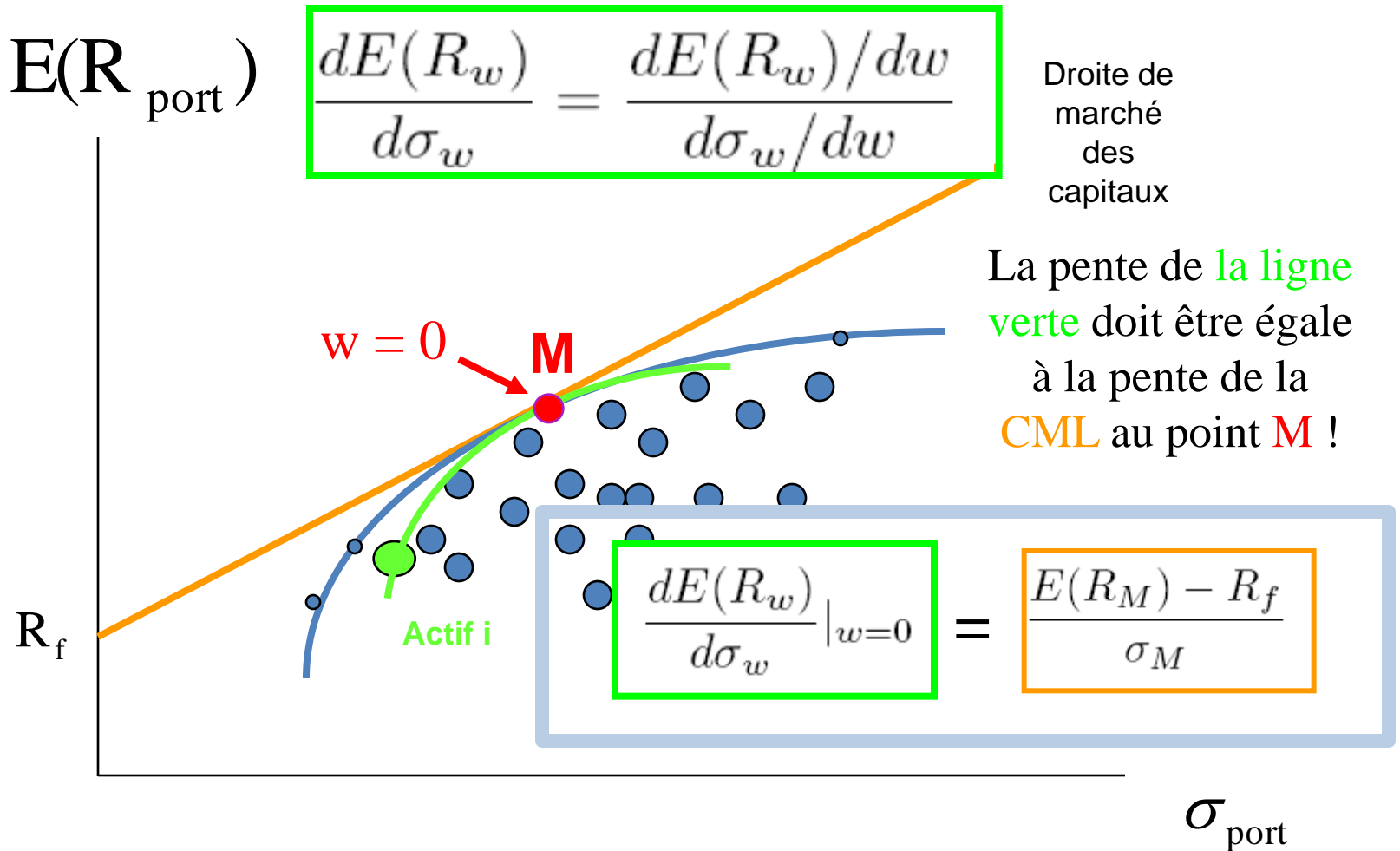
Pourquoi le MEDAF fonctionne-t-il ?

Mathématiquement la pente de la **ligne verte** au point **M** est :



Pourquoi le MEDAF fonctionne-t-il ?

Nous pouvons aussi exprimer la pente de la **ligne verte**:



Preuve du MEDAF

Nous voulons
trouver la
pente de la
ligne verte en

$$\left. \frac{dE(R_w)}{d\sigma_w} \right|_{w=0}$$

dérivant ces
équations à
 $w=0$,

et en utilisant
cette relation
pour égaliser
la pente (à
 $w=0$) à la
pente de la
LMC

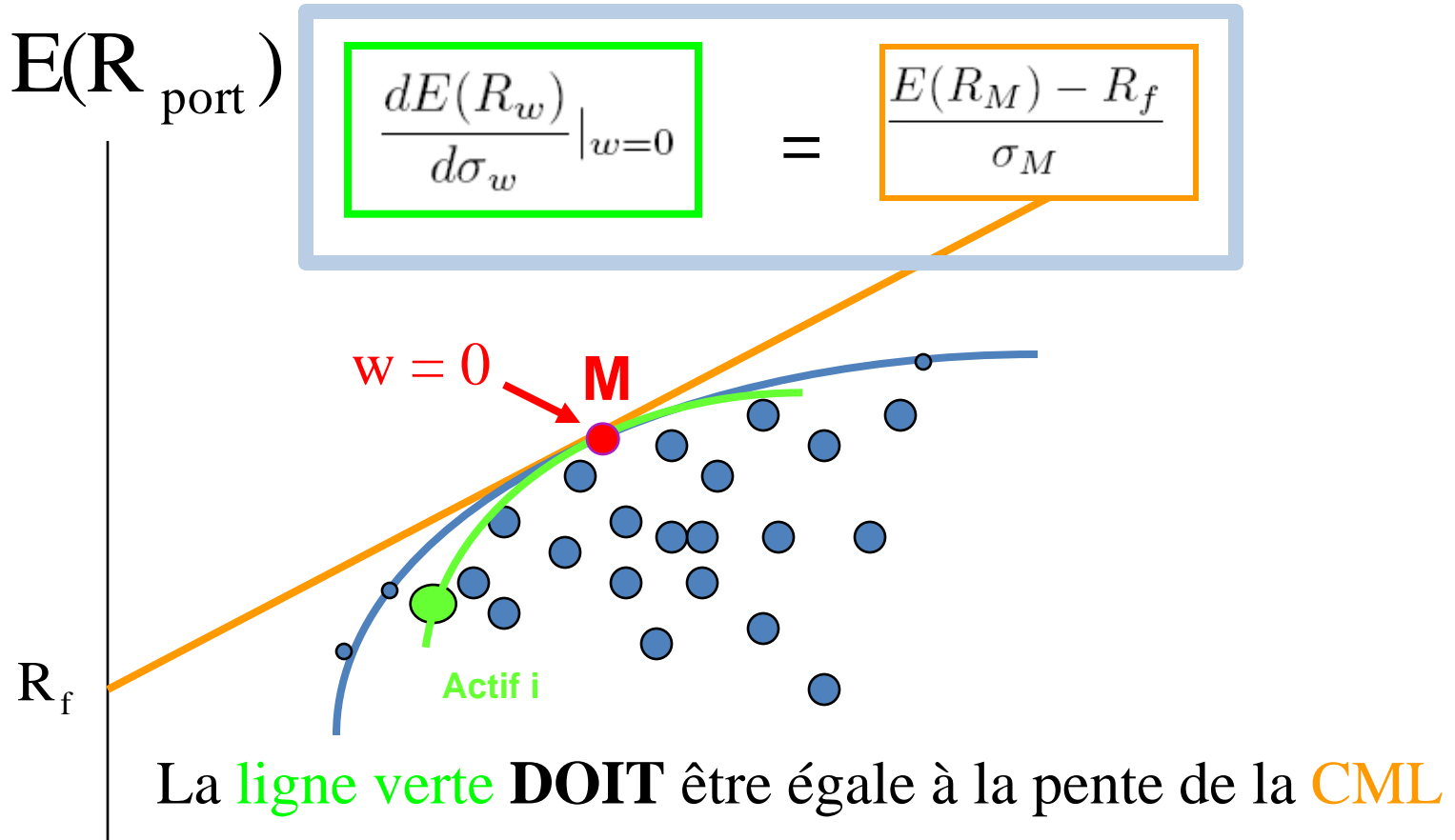
$$E(R_w) = (1 - w)E(R_M) + wE(R_i)$$

$$\sigma_w = [w^2\sigma_i^2 + (1 - w)^2\sigma_M^2 + 2w(1 - w)\sigma_{iM}]^{1/2}$$

$$\frac{dE(R_w)}{d\sigma_w} = \frac{dE(R_w)/dw}{d\sigma_w/dw}$$

$$\left. \frac{dE(R_w)}{d\sigma_w} \right|_{w=0} = \frac{E(R_M) - R_f}{\sigma_M}$$

Preuve du MEDAF



Prenons quelques dérivées :

$$E(R_w) = (1 - w)E(R_M) + wE(R_i) = E(R_M) + w[E(R_i) - E(R_M)]$$

La dérivée de l'espérance de rendement par rapport à w

$$\frac{dE(R_w)}{dw} = E(R_i) - E(R_M)$$

Prenons quelques dérivées :

$$\sigma_w = [w^2 \sigma_i^2 + (1 - w)^2 \sigma_M^2 + 2w(1 - w)\sigma_{iM}]^{1/2}$$

La dérivée de l'écart type par rapport à w

$$\frac{d\sigma_w}{dw} = \frac{w\sigma_i^2 + (w - 1)\sigma_M^2 + (1 - 2w)\sigma_{iM}}{\sigma_w}$$

Évaluer la dérivée à $w = 0$, ce qui représente le portefeuille de marché !

$$\left. \frac{d\sigma_w}{dw} \right|_{w=0} = \frac{-\sigma_M^2 + \sigma_{iM}}{\sigma_w}$$

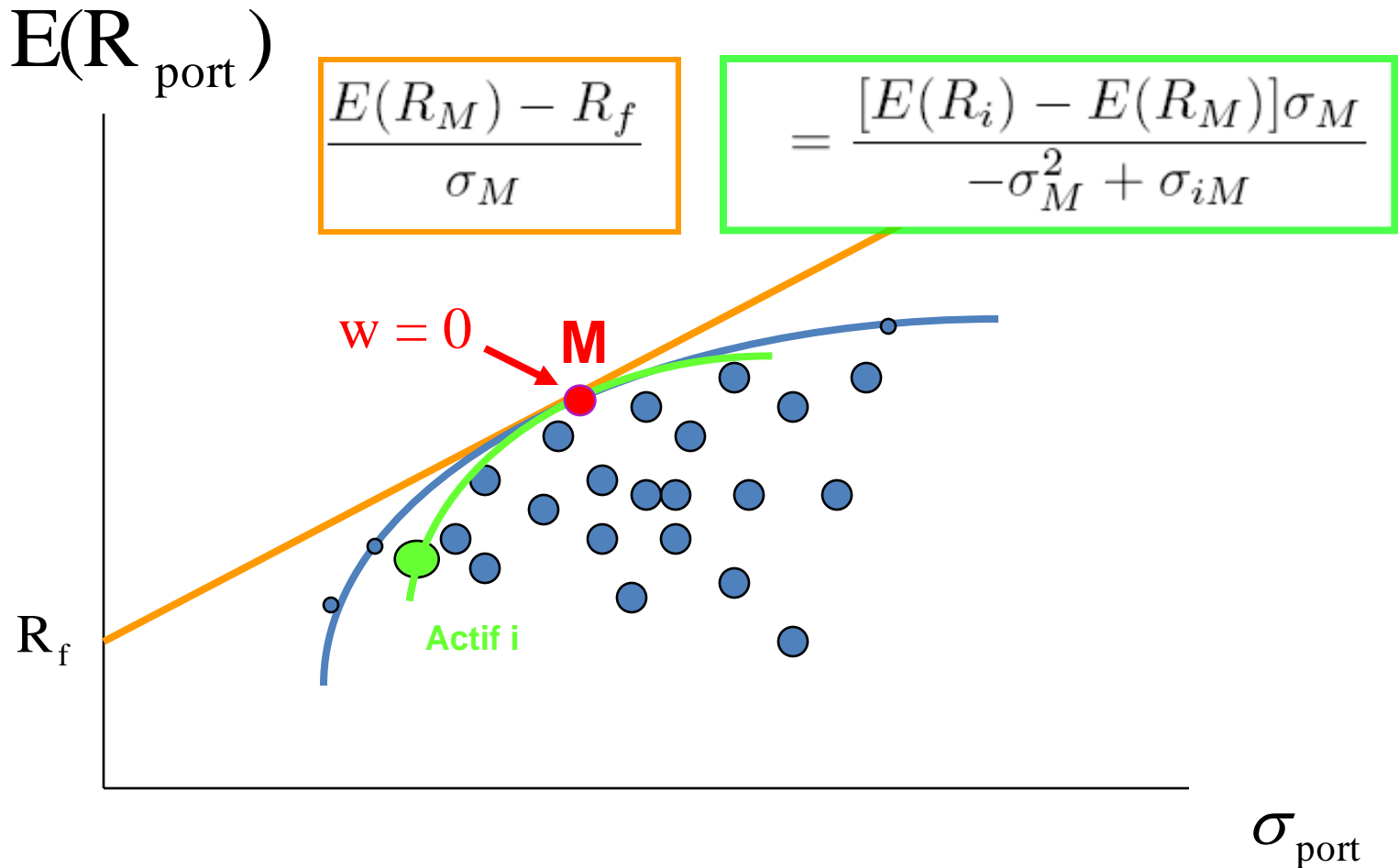
En égalisant les pentes

$$\frac{dE(R_w)}{d\sigma_w} = \frac{dE(R_w)/dw}{d\sigma_w/dw} = \frac{\frac{dE(R_w)}{dw}}{\frac{d\sigma_w}{dw} \Big|_{w=0}} = \frac{E(R_i) - E(R_M)}{-\sigma_M^2 + \sigma_{iM}}$$

$$\frac{dE(R_w)}{d\sigma_w} \Big|_{w=0} = \frac{E(R_i) - E(R_M)}{\frac{-\sigma_M^2 + \sigma_{iM}}{\sigma_w}}$$

$$= \frac{[E(R_i) - E(R_M)]\sigma_M}{-\sigma_M^2 + \sigma_{iM}} = \frac{E(R_M) - R_f}{\sigma_M}$$

En égalisant les pentes



Maintenant isolons $E(R_i)$

$$\frac{[E(R_i) - E(R_M)]\sigma_M}{-\sigma_M^2 + \sigma_{iM}} = \frac{E(R_M) - R_f}{\sigma_M}$$

$$E(R_i) = \frac{(E(R_M) - R_f)(-\sigma_M^2 + \sigma_{iM})}{\sigma_M^2} + E(R_M)$$

$$E(R_i) = -E(R_M) + R_f + \frac{(E(R_M) - R_f)\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} + E(R_M)$$

$$E(R_i) = R_f + B_{iM}[E(R_M) - R_f]$$

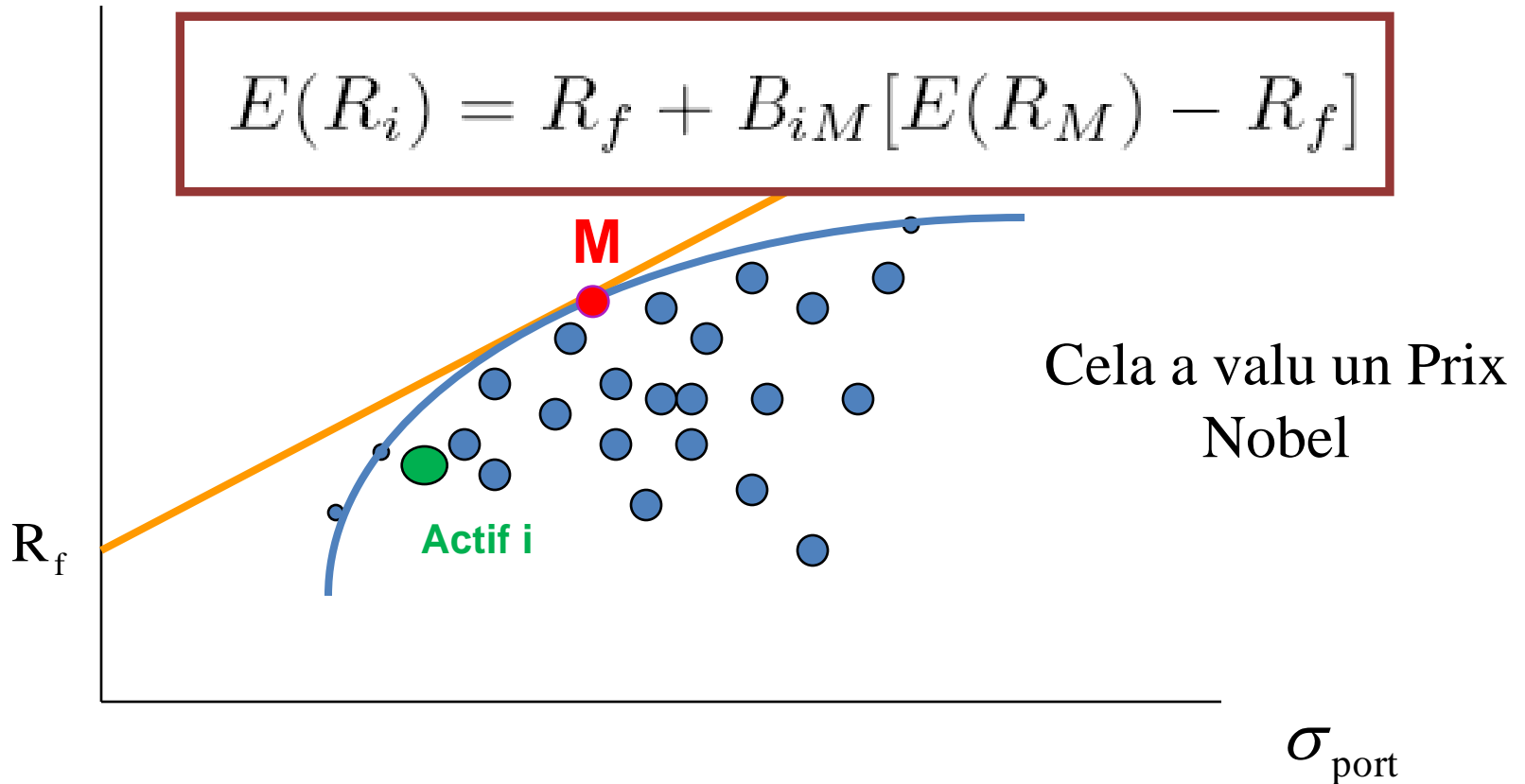
On en déduit l'équation du MEDAF

Nous venons tout juste de démontrer que:

Peu importe **l'actif i** que nous choisissons, l'espérance de rendement de cet actif est donnée par :

$E(R_{\text{port}})$

$$E(R_i) = R_f + B_{iM} [E(R_M) - R_f]$$



Exemple sur le MEDAF

Supposons que nous avons ces deux actifs efficients risqués dans l'économie Eggbert:

Actif	E(r)	Béta
Egg	0.07	0.5
Bert	0.10	0.8

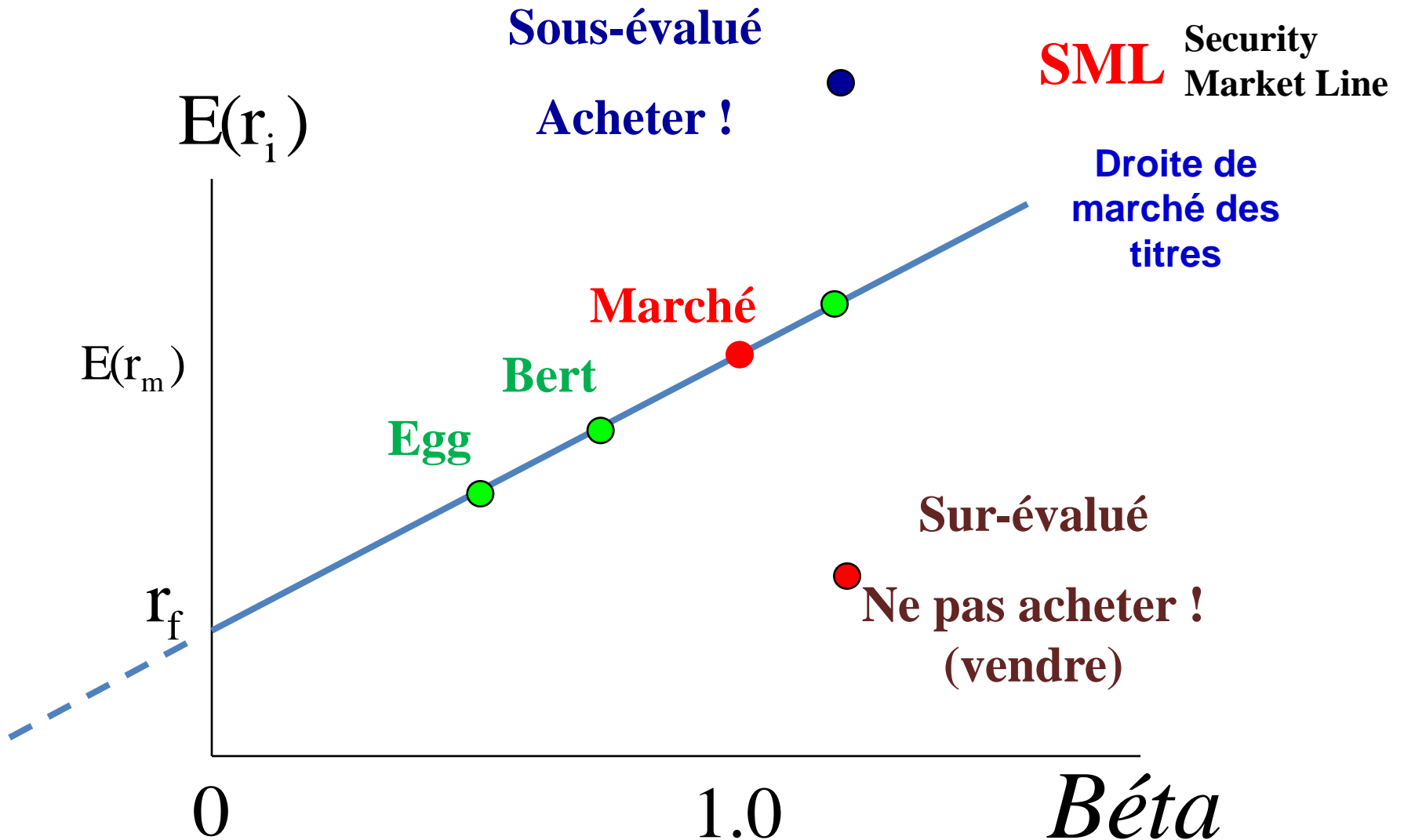
Sans connaître $E(R_m)$ ou R_f .

Et supposons que Karina pense à acheter cet actif:

Actif	E(r)	Beta
Karina	0.16	1.3

Devrait-t-elle acheter cet actif ?

Sous ou Sur évalué ?



Exemple MEDAF

Nous savons que les deux actifs efficients ont :

$$E(R_{\text{Egg}}) = r_f + B_{\text{Egg}}(E(R_m) - R_f)$$

$$E(R_{\text{Bert}}) = r_f + B_{\text{Bert}}(E(R_m) - R_f)$$

Si Karina est un actif efficient, nous avons:

$$E(R_{\text{Karina}}) = r_f + B_{\text{Karina}}(E(R_m) - R_f)$$

Exemple MEDAF

Premièrement, trouvez les espérance de rendement du marché et de l'actif sans risque en résolvant deux équations à deux inconnues :

$$E(R_{Egg}) = (1 - B_{Egg}) R_f + B_{Egg} E(R_m)$$

$$E(R_{Bert}) = (1 - B_{Bert}) R_f + B_{Bert} E(R_m)$$

Un peu d'algèbre :

$$(E(R_{Egg}) - (1 - B_{Egg}) R_f) / B_{Egg} = (E(R_{Bert}) - (1 - B_{Bert}) R_f) / B_{Bert}$$

$$R_f = [B_{Bert} E(R_{Egg}) - B_{Egg} E(R_{Bert})] / [B_{Egg}(1 - B_{Bert}) + B_{Bert}(1 - B_{Egg})]$$

$$E(R_m) = (E(R_{Egg}) - (1 - B_{Egg}) R_f) / B_{Egg}$$

Exemple MEDAF

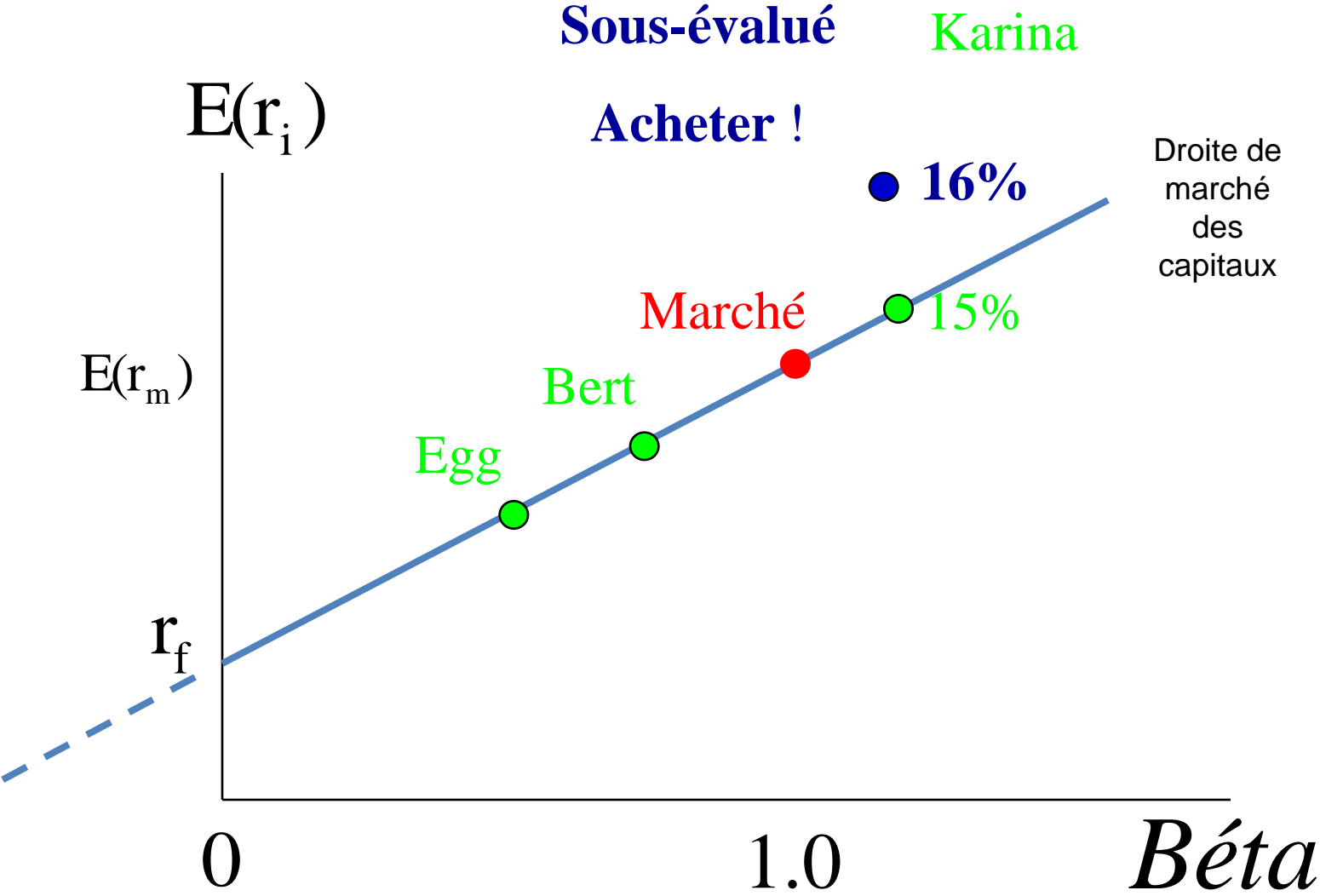
Actif	E(r)	Beta
Egg	0.07	0.50
Bert	0.10	0.80
Karina	0.16	1.30

$$\mathbf{Rf} = \frac{[B_{Bert} E(R_{Egg}) - B_{Egg} E(R_{Bert})]}{[-B_{Egg}(1-B_{Bert}) + B_{Bert}(1-B_{Egg})]} = .02$$

$$\mathbf{E(Rm)} = (E(R_{Egg}) - (1 - B_{Egg}) \mathbf{Rf}) / B_{egg} = .12$$

$$\begin{aligned} E(R_{Karina}) &= rf + B_{Karina}(E(Rm) - Rf) \\ &= .02 + 1.3*(.12 - .02) = \mathbf{.15} < .16 \end{aligned}$$

Sous ou Sur évalué ?



Un autre exemple

État de l'économie	Probabilité	Rendement Eggbert	Rendement Dingo	Taux sans risque
Mauvais	0.20	0.04	0.07	0.03
Bon	0.45	0.10	0.10	0.03
Excellent	0.35	0.22	0.19	0.03
Esperance de rendement		?	?	
Variance		?	?	
Coefficient de corrélation avec le marché		0.712	0.842	
Covariance avec le marché		0.0015	?	

Exemple

Si l'espérance de rendement du portefeuille de marché est de 9%

- A) Déterminez la covariance entre l'espérance de rendement de Dingo et l'espérance de rendement du portefeuille de marché.

- B) Déterminez l'espérance de rendement de Dingo en utilisant le MEDAF. Recommanderiez-vous à un investisseur d'acheter des actions Dingo? Justifiez votre réponse.

Solution :

- $E(re) = 13,00\%$
- $E(rd) = 12,55\%$
- $Var(re) = 0,004860$
- $Var(rd) = 0,002365$
- Écart type(re) = 0,069714
- Écart type(rd) = 0,048629
- Écart type du marché = 0,030220
- Variance du marché = 0,000913
- Covariance de Dingo avec le marché = 0,001237
- Beta de Dingo = 1,35
- Espérance de rendement du marché = 9%
- Espérance de rendement de Dingo avec le MEDAF:
- $E(rd) = R_f + \text{BetaDingo} (R_m - R_f) = 11,13\%$
- **12,55% > 11,13% - Acheter!**