Gestion de portefeuille

La démonstration du modèle d'évaluation des actifs financiers

MEDAF

Ou

CAPM

Capital asset pricing model

Saïd Chermak infomaths.com

Plan du Cours

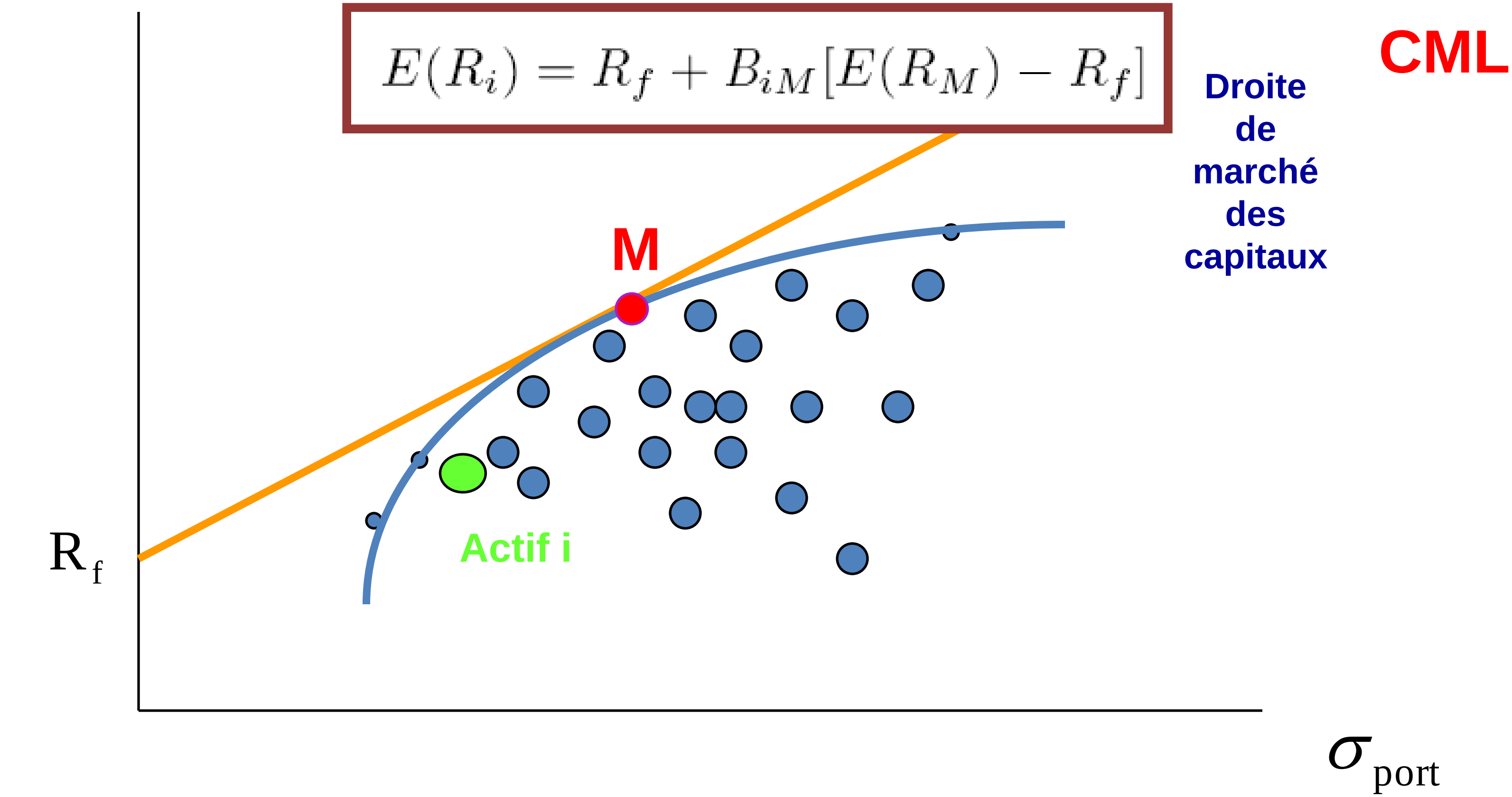
- Une preuve intéressante du MEDAF
- Faire quelques exemples

Une preuve intéressante du MEDAF

Le MEDAF dit :

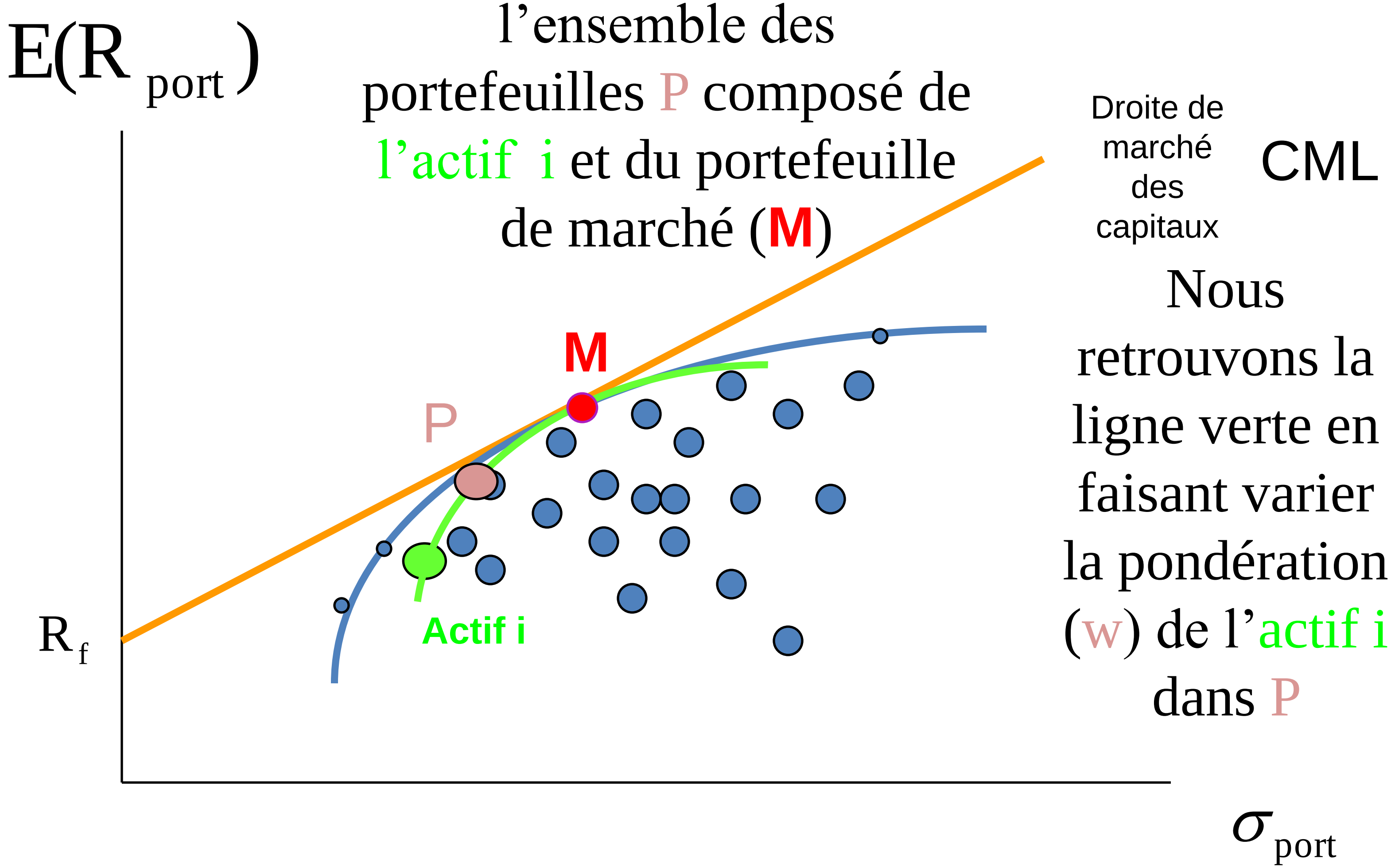
Pour tout actif i que nous choisissons, l'espérance de rendement est donnée par :

$$E(R_i) = R_f + B_{iM}[E(R_M) - R_f]$$



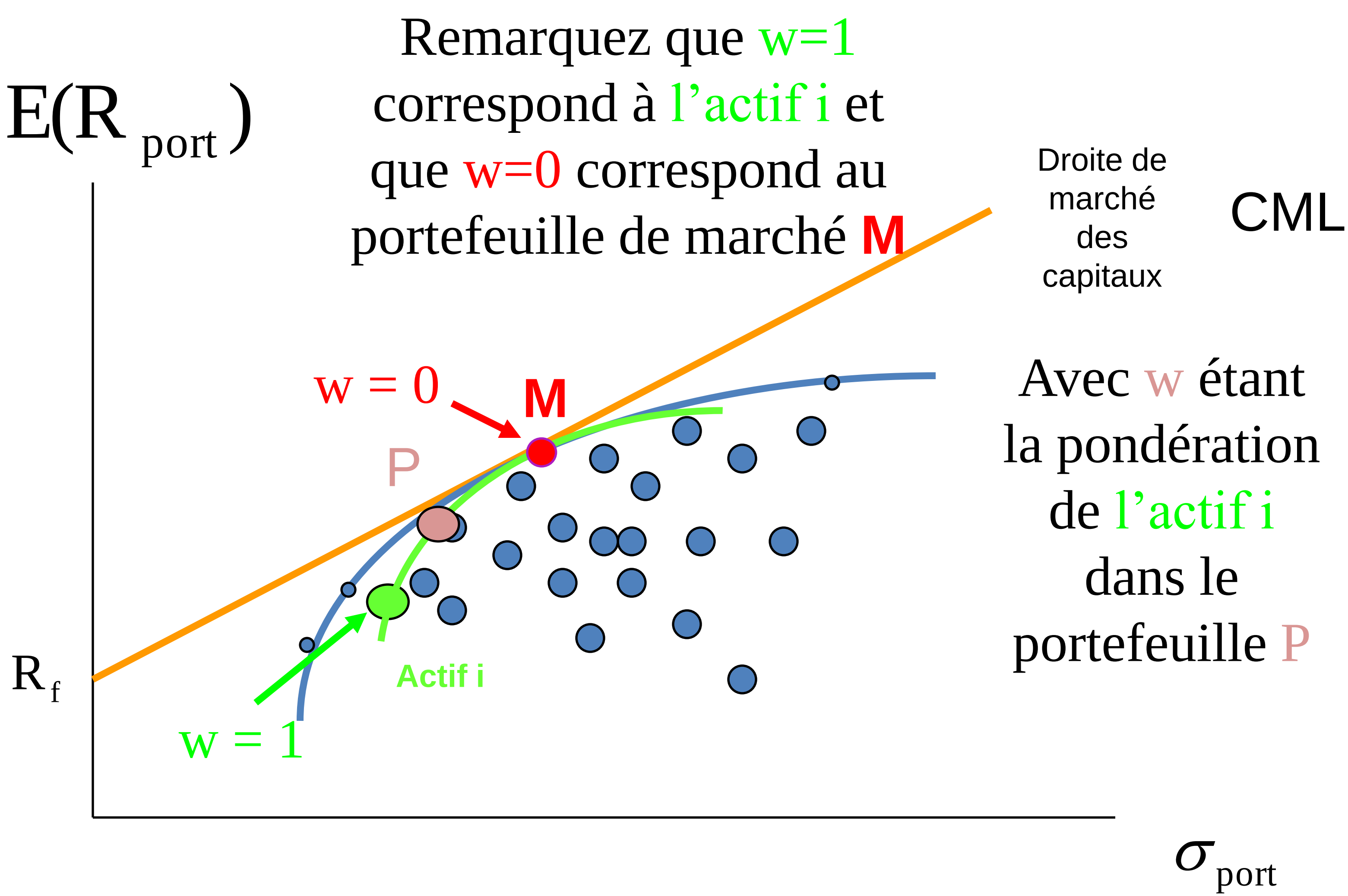
Pourquoi le MEDAF fonctionne-t-il ?

La ligne verte trace l'ensemble des portefeuilles P composé de l'actif i et du portefeuille de marché (**M**)



Nous retrouvons la ligne verte en faisant varier la pondération (w) de l'actif i dans P

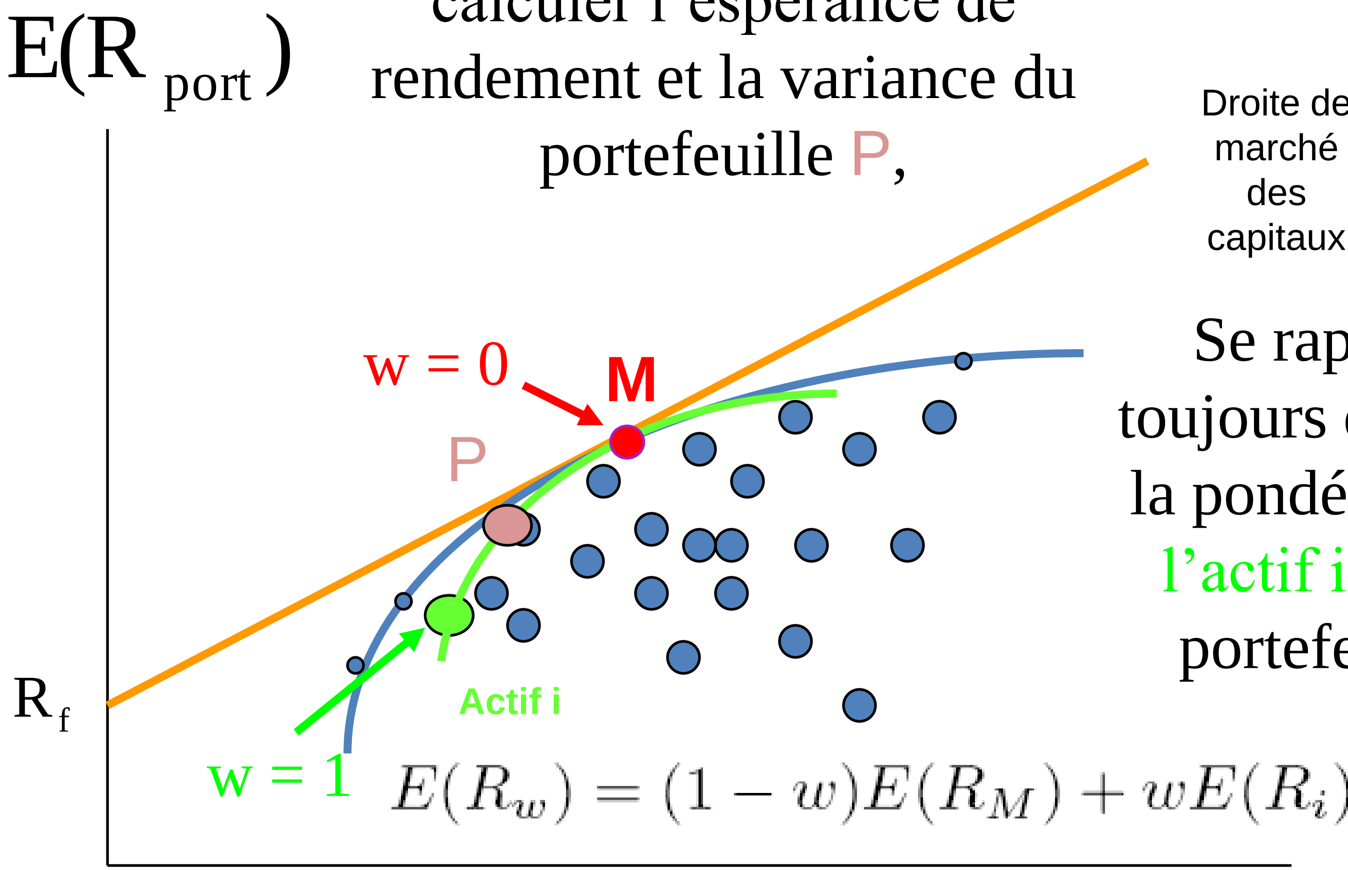
Pourquoi le MEDAF fonctionne-t-il ?



Saïd Chermak infomaths.com

Pourquoi le MEDAF fonctionne-t-il ?

Pour chaque w, nous pouvons calculer l'espérance de rendement et la variance du portefeuille P,



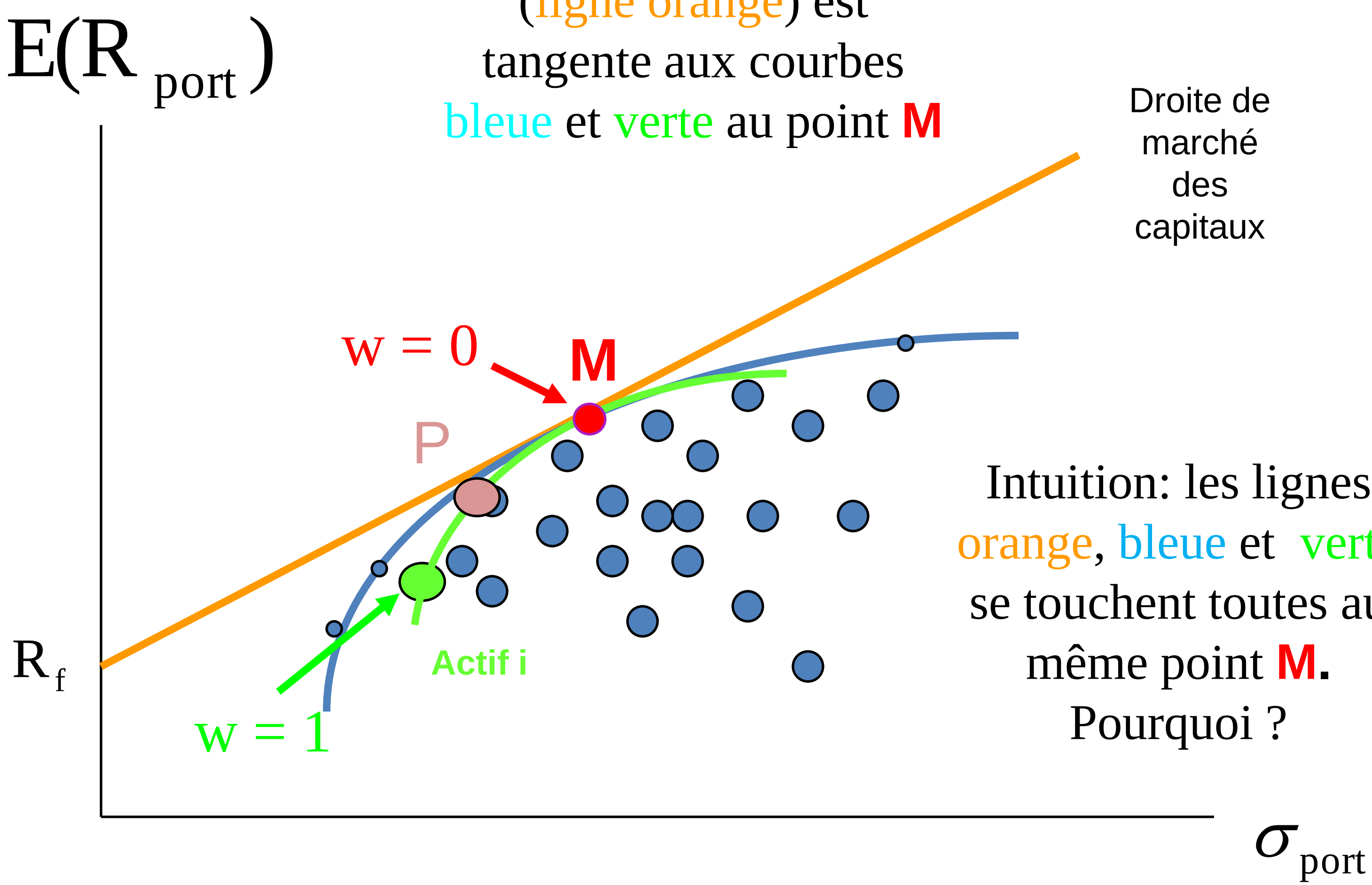
Se rappelant toujours que w est la pondération de l'actif i dans le portefeuille P

$$E(R_w) = (1 - w)E(R_M) + wE(R_i)$$

$$\sigma_w = [w^2\sigma_i^2 + (1 - w)^2\sigma_M^2 + 2w(1 - w)\sigma_{iM}]^{1/2}$$

Pourquoi le MEDAF fonctionne-t-il ?

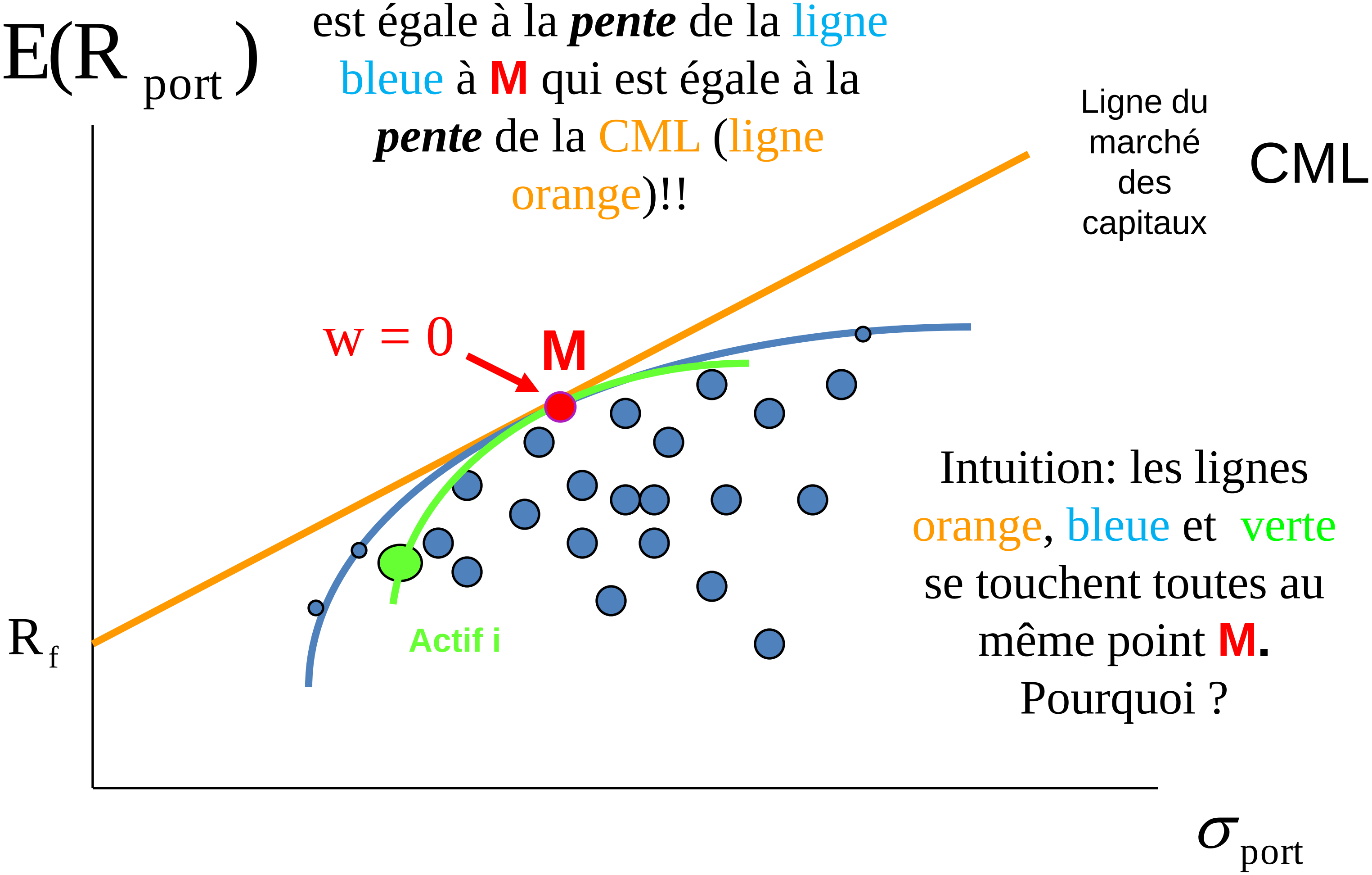
Remarquez que la CML (ligne orange) est tangente aux courbes bleue et verte au point **M**



Intuition: les lignes orange, bleue et verte se touchent toutes au même point **M**. Pourquoi ?

Pourquoi le MEDAF fonctionne-t-il ?

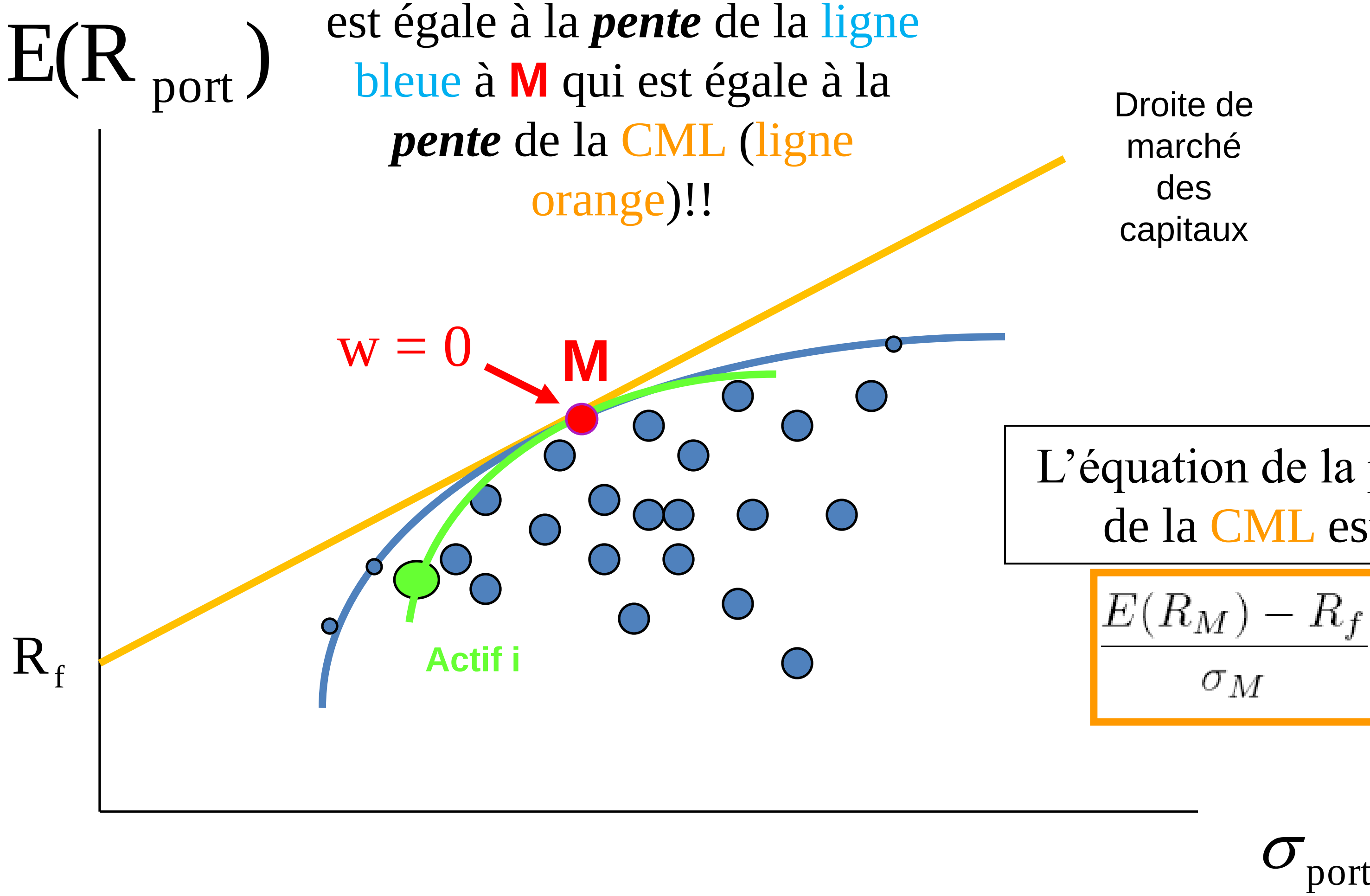
La ***pente*** de la ligne verte à **M** est égale à la ***pente*** de la ligne bleue à **M** qui est égale à la ***pente*** de la CML (ligne orange)!!



Intuition: les lignes orange, bleue et verte se touchent toutes au même point **M**. Pourquoi ?

Pourquoi le MEDAF fonctionne-t-il ?

La ***pente*** de la ligne verte à **M** est égale à la ***pente*** de la ligne bleue à **M** qui est égale à la ***pente*** de la CML (ligne orange)!!

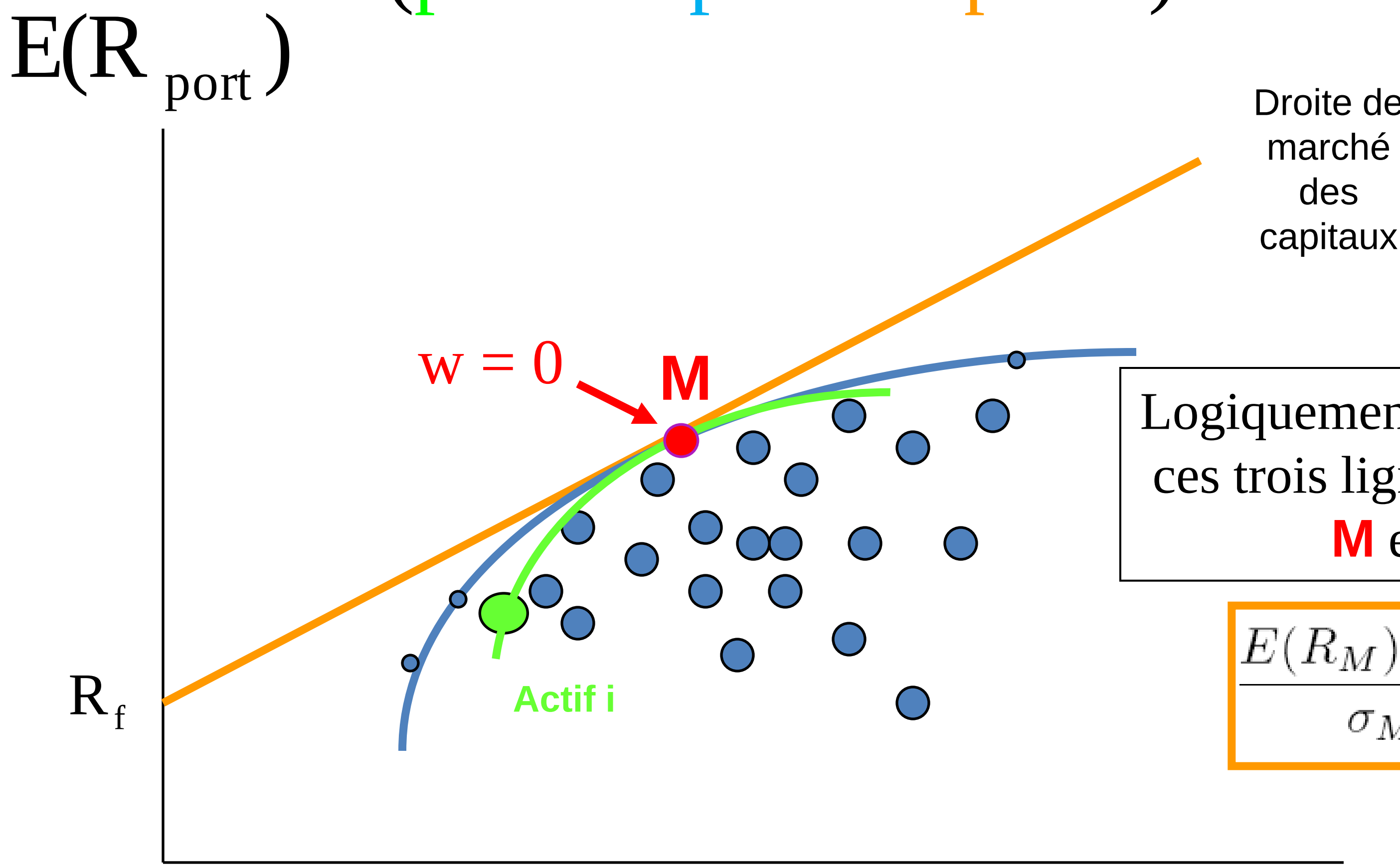


L'équation de la pente de la CML est :

$$\boxed{\frac{E(R_M) - R_f}{\sigma_M}}$$

Pourquoi le MEDAF fonctionne-t-il ?

(pente = pente = pente)



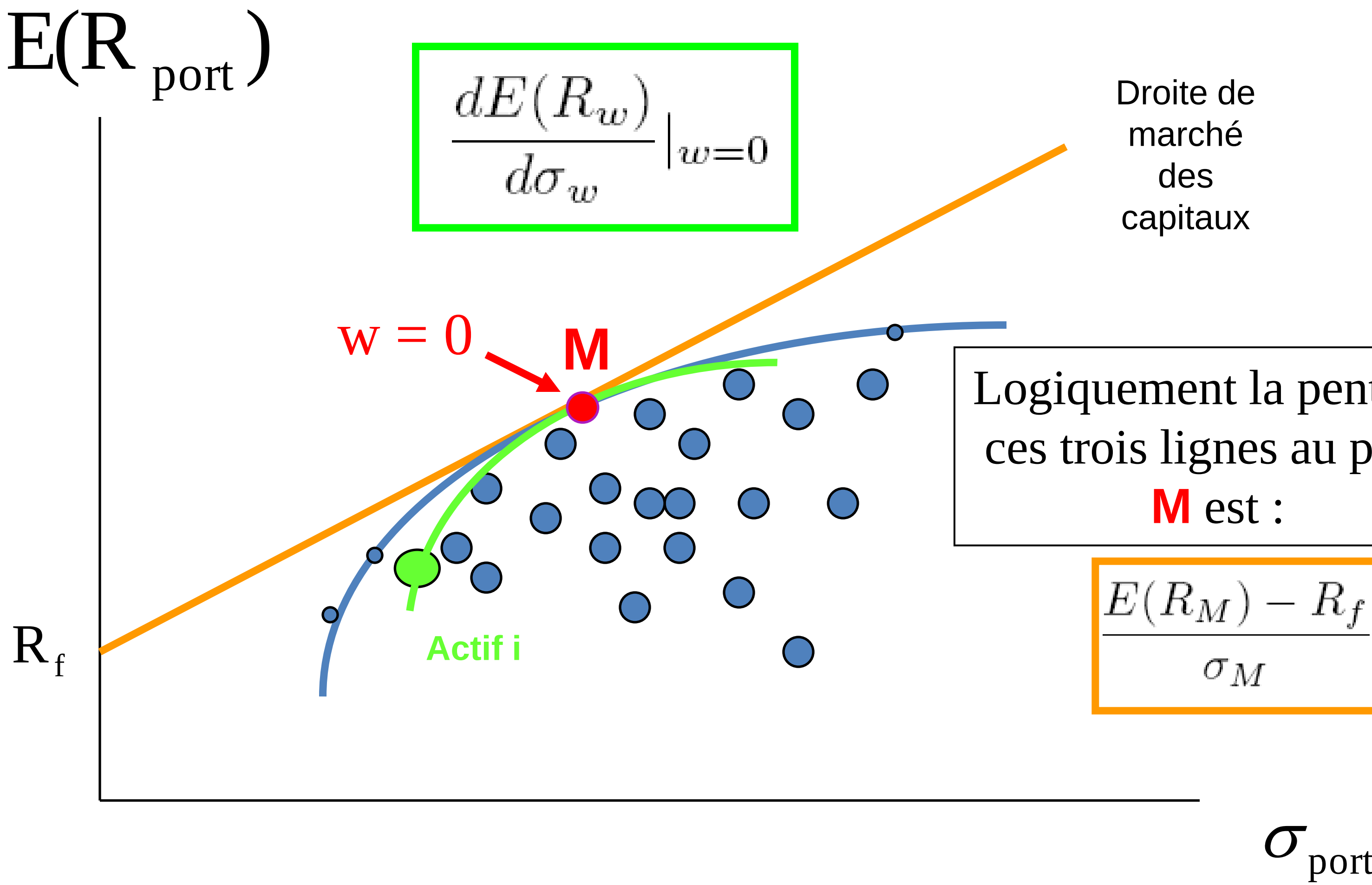
Logiquement la pente de ces trois lignes au point **M** est :

$$\boxed{\frac{E(R_M) - R_f}{\sigma_M}}$$

Pourquoi le MEDAF fonctionne-t-il ?

Mathématiquement la pente de la ligne verte au point **M** est :

$$\left.\frac{dE(R_w)}{d\sigma_w}\right|_{w=0}$$



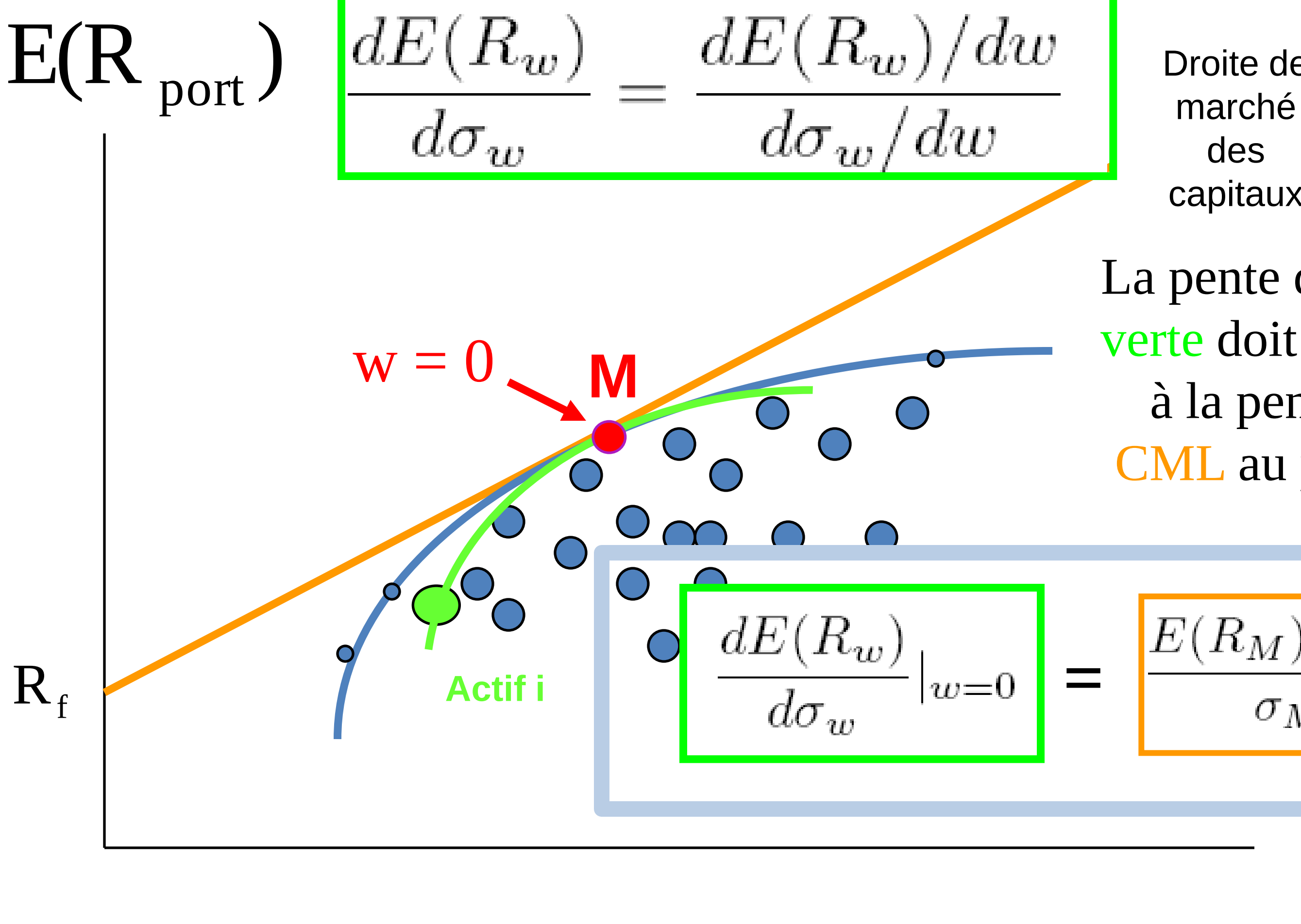
Logiquement la pente de ces trois lignes au point **M** est :

$$\frac{E(R_M) - R_f}{\sigma_M}$$

Pourquoi le MEDAF fonctionne-t-il ?

Nous pouvons aussi exprimer la pente de la ligne verte:

$$\frac{dE(R_w)}{d\sigma_w} = \frac{dE(R_w)/dw}{d\sigma_w/dw}$$



La pente de la ligne verte doit être égale à la pente de la CML au point M !

$$\left.\frac{dE(R_w)}{d\sigma_w}\right|_{w=0} = \frac{E(R_M) - R_f}{\sigma_M}$$

Preuve du MEDAF

Nous voulons trouver la pente de la ligne verte en

$$\boxed{\frac{dE(R_w)}{d\sigma_w}\Big|_{w=0}}$$

dérivant ces équations à w=0,

$$E(R_w) = (1-w)E(R_M) + wE(R_i)$$

$$\sigma_w = [w^2\sigma_i^2 + (1-w)^2\sigma_M^2 + 2w(1-w)\sigma_{iM}]^{1/2}$$

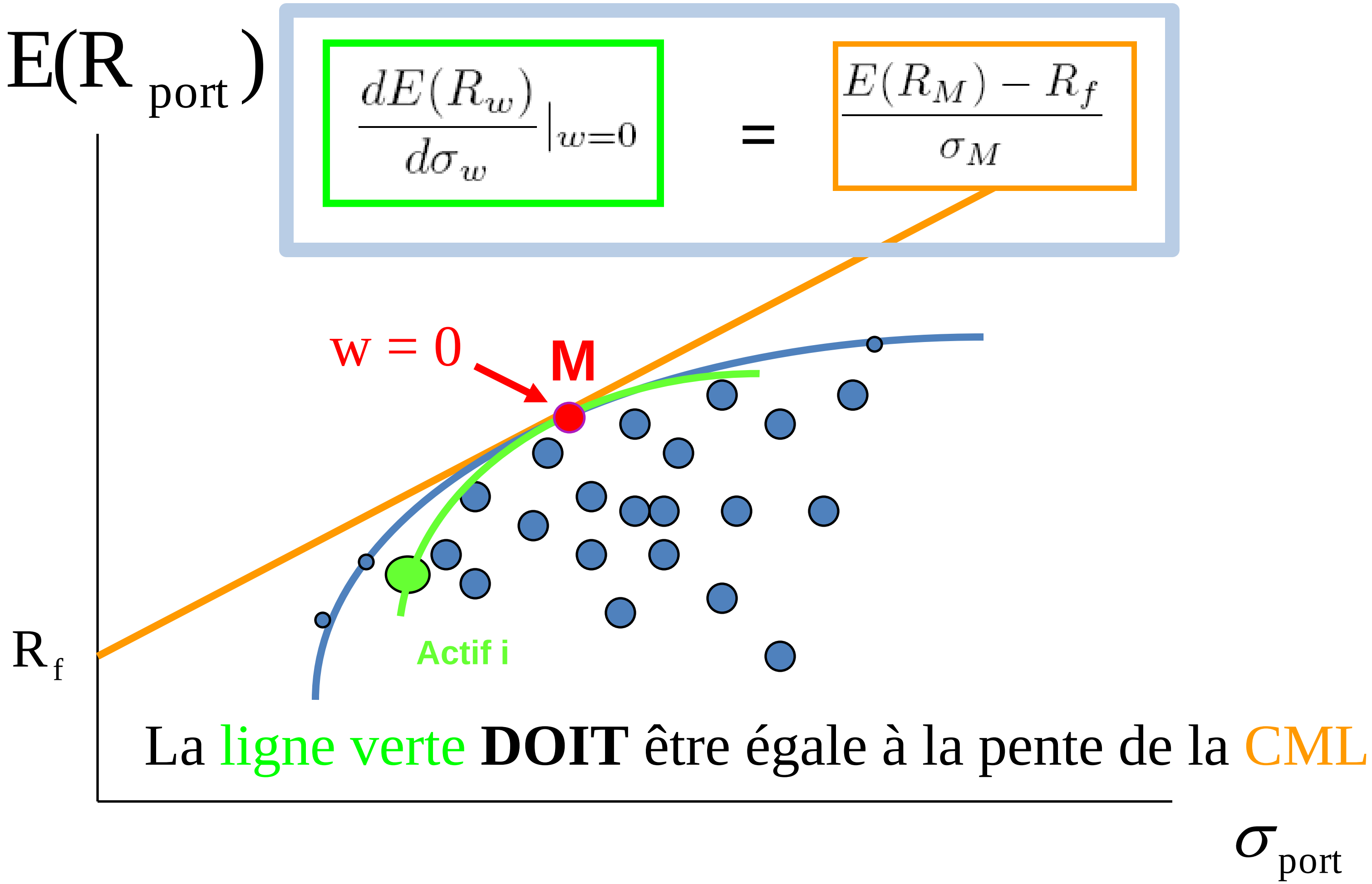
et en utilisant cette relation

$$\boxed{\frac{dE(R_w)}{d\sigma_w} = \frac{dE(R_w)/dw}{d\sigma_w/dw}}$$

pour égaliser la pente (à w=0) à la pente de la LMC

$$\boxed{\frac{dE(R_w)}{d\sigma_w}\Big|_{w=0}} = \boxed{\frac{E(R_M)-R_f}{\sigma_M}}$$

Preuve du MEDAF



Prenons quelques dérivées :

$$E(R_w) = (1-w)E(R_M) + wE(R_i) = E(R_M) + w[E(R_i) - E(R_M)]$$

La dérivée de l'espérance de
rendement par rapport à w

$$\frac{dE(R_w)}{dw} = E(R_i) - E(R_M)$$

Prenons quelques dérivées :

$$\sigma_w = [w^2\sigma_i^2 + (1-w)^2\sigma_M^2 + 2w(1-w)\sigma_{iM}]^{1/2}$$

La dérivée de l'écart type par rapport à w

$$\frac{d\sigma_w}{dw} = \frac{w\sigma_i^2 + (w-1)\sigma_M^2 + (1-2w)\sigma_{iM}}{\sigma_w}$$

Évaluer la dérivée à w = 0, ce qui représente le portefeuille de marché !

$$\frac{d\sigma_w}{dw}\Big|_{w=0} = \frac{-\sigma_M^2 + \sigma_{iM}}{\sigma_w}$$

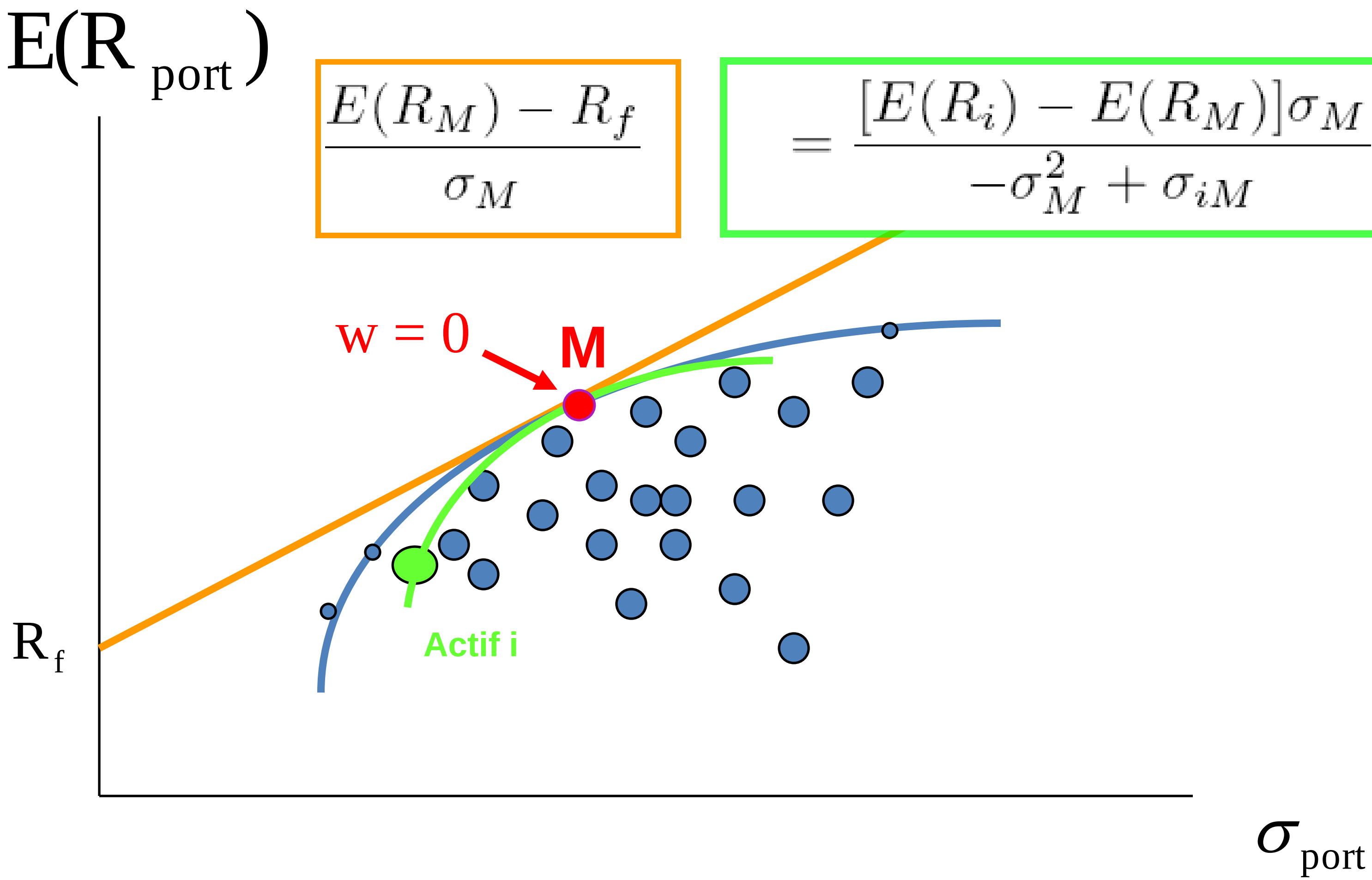
En égalisant les pentes

$$\boxed{\frac{dE(R_w)}{d\sigma_w} = \frac{dE(R_w)/dw}{d\sigma_w/dw}} = \frac{\dfrac{dE(R_w)}{dw} = E(R_i) - E(R_M)}{\dfrac{d\sigma_w}{dw}\Big|_{w=0} = \dfrac{-\sigma_M^2 + \sigma_{iM}}{\sigma_w}}$$

$$\boxed{\frac{dE(R_w)}{d\sigma_w}\Big|_{w=0} = \frac{E(R_i) - E(R_M)}{\frac{-\sigma_M^2 + \sigma_{iM}}{\sigma_w}}}$$

$$\boxed{= \frac{[E(R_i) - E(R_M)]\sigma_M}{-\sigma_M^2 + \sigma_{iM}}} = \boxed{\frac{E(R_M) - R_f}{\sigma_M}}$$

En égalisant les pentes



Maintenant isolons $E(R_i)$

$$\frac{[E(R_i) - E(R_M)]\sigma_M}{-\sigma_M^2 + \sigma_{iM}} = \frac{E(R_M) - R_f}{\sigma_M}$$

$$E(R_i) = \frac{(E(R_M) - R_f)(-\sigma_M^2 + \sigma_{iM})}{\sigma_M^2} + E(R_M)$$

$$E(R_i) = -E(R_M) + R_f + \frac{(E(R_M) - R_f)\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} + E(R_M)$$

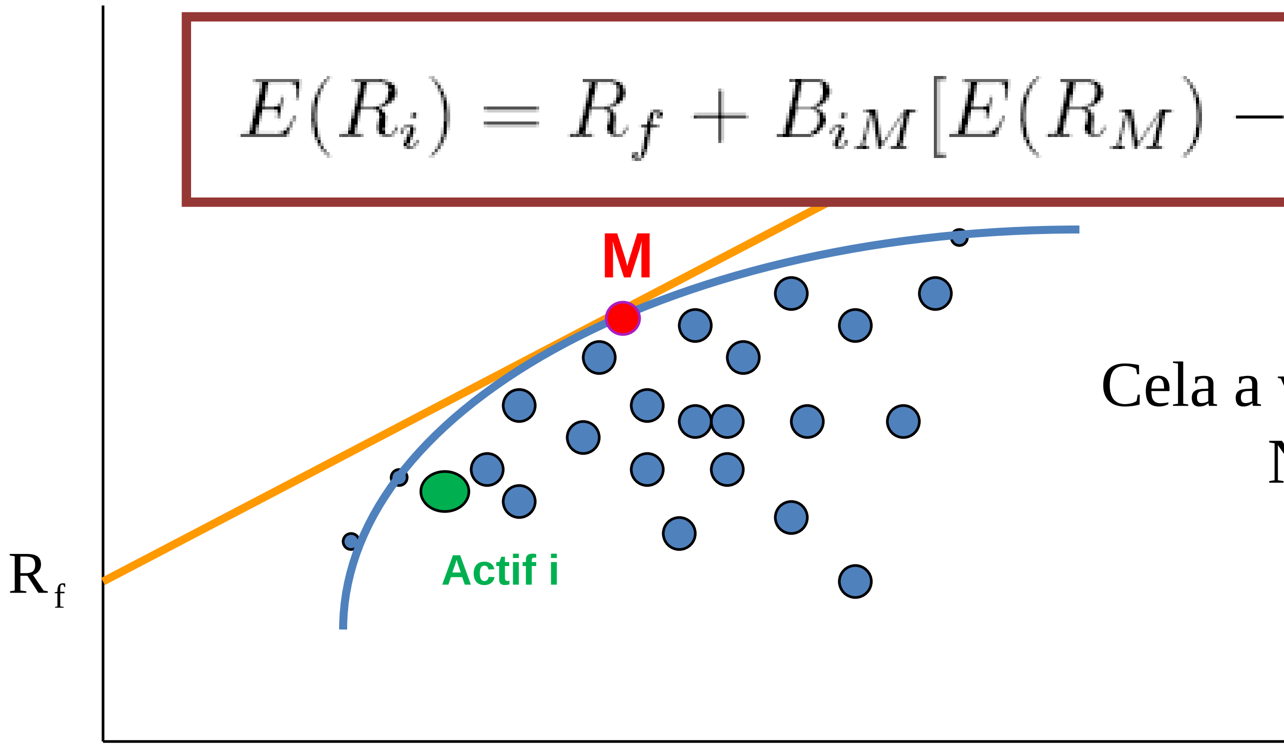
$$\boxed{E(R_i) = R_f + B_{iM}[E(R_M) - R_f]}$$

On en déduit l'équation du MEDAF

Nous venons tout juste de démontrer que:

Peu importe **l'actif i** que nous choisissons, l'espérance de rendement de cet actif est donnée par :

$$\boxed{E(R_i) = R_f + B_{iM}[E(R_M) - R_f]}$$



Cela a valu un Prix Nobel

Exemple sur le MEDAF

Supposons que nous avons ces deux actifs efficients risqués dans l'économie Eggbert:

Actif	**E(r)**	**Béta**
Egg	0.07	0.5
Bert	0.10	0.8

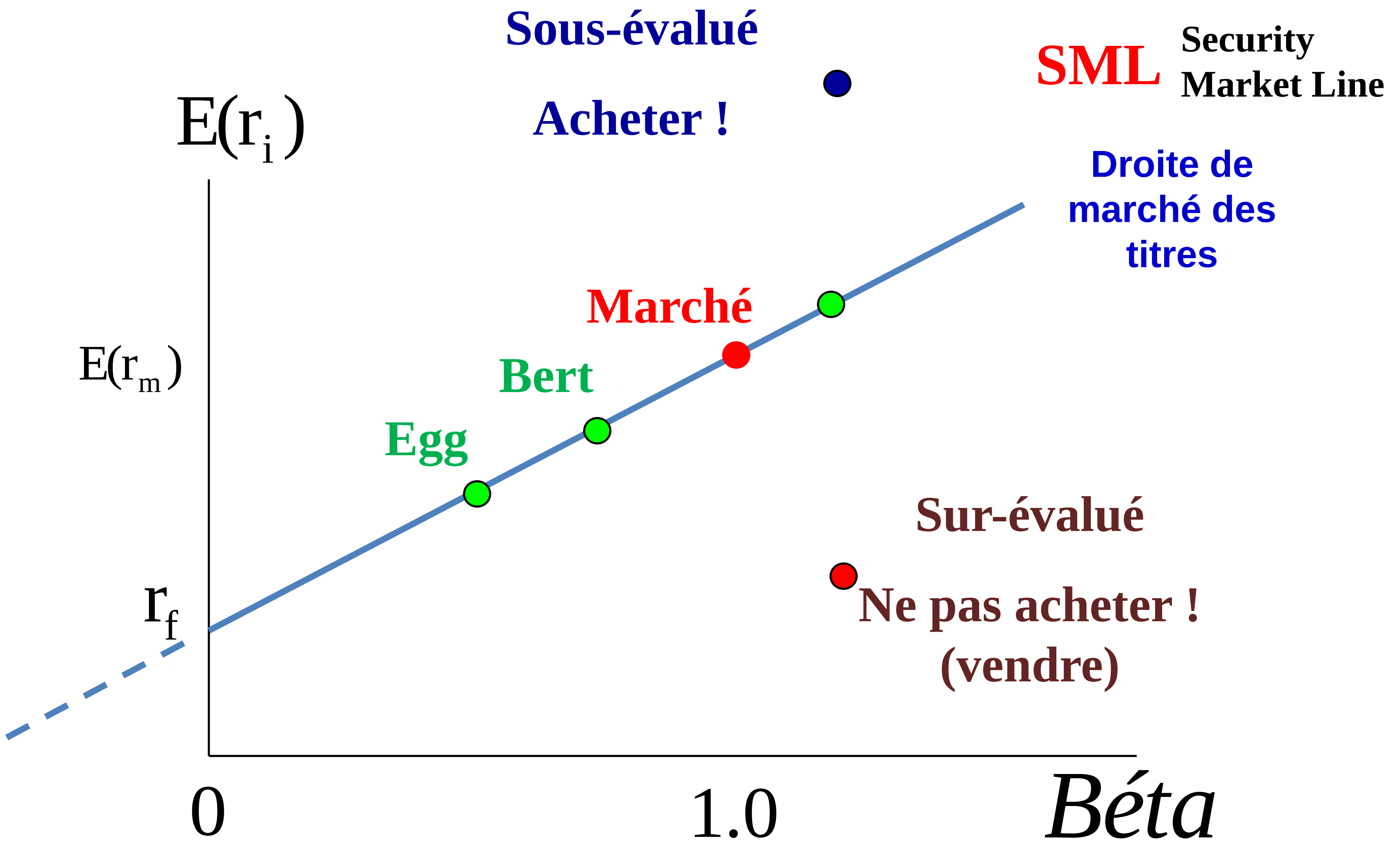
Sans connaître E(Rm) ou Rf.

Et supposons que Karina pense à acheter cet actif:

Actif	**E(r)**	**Beta**
Karina	0.16	1.3

Devrait-t-elle acheter cet actif ?

Sous ou Sur évalué ?



Exemple MEDAF

Nous savons que les deux actifs efficients ont :

$E(R_{Egg}) = r_f + B_{Egg}(E(R_m) - R_f)$

$E(R_{Bert}) = rf + B_{Bert}(E(R_m) - R_f)$

Si Karina est un actif efficient, nous avons:

$E(R_{Karina}) = rf + B_{Karina}(E(R_m) - R_f)$

Exemple MEDAF

Premièrement, trouvez les espérance de rendement du marché et de l'actif sans risque en résolvant deux équations à

deux inconnues :

$E(R_{Egg}) = (1- B_{Egg})\, R_f + B_{Egg}\, E(R_m)$

$E(R_{Bert}) = (1- B_{Bert})\, R_f + B_{Bert}\, E(R_m)$

Un peu d'algèbre :

$(E(R_{Egg}) - (1- B_{Egg})\, R_f)/ B_{Egg} = (E(R_{Bert}) - (1- B_{Bert})\, R_f)/ B_{Bert}$

$R_f = [B_{Bert}\; E(R_{Egg}) - B_{Egg}\, E(R_{Bert})]/ [B_{Egg}(1-B_{Bert}) + B_{Bert}\,(1- B_{Egg})]$

$E(R_m) = (E(R_{Egg}) - (1- B_{Egg})\, R_f)/ B_{Egg}$

Exemple MEDAF

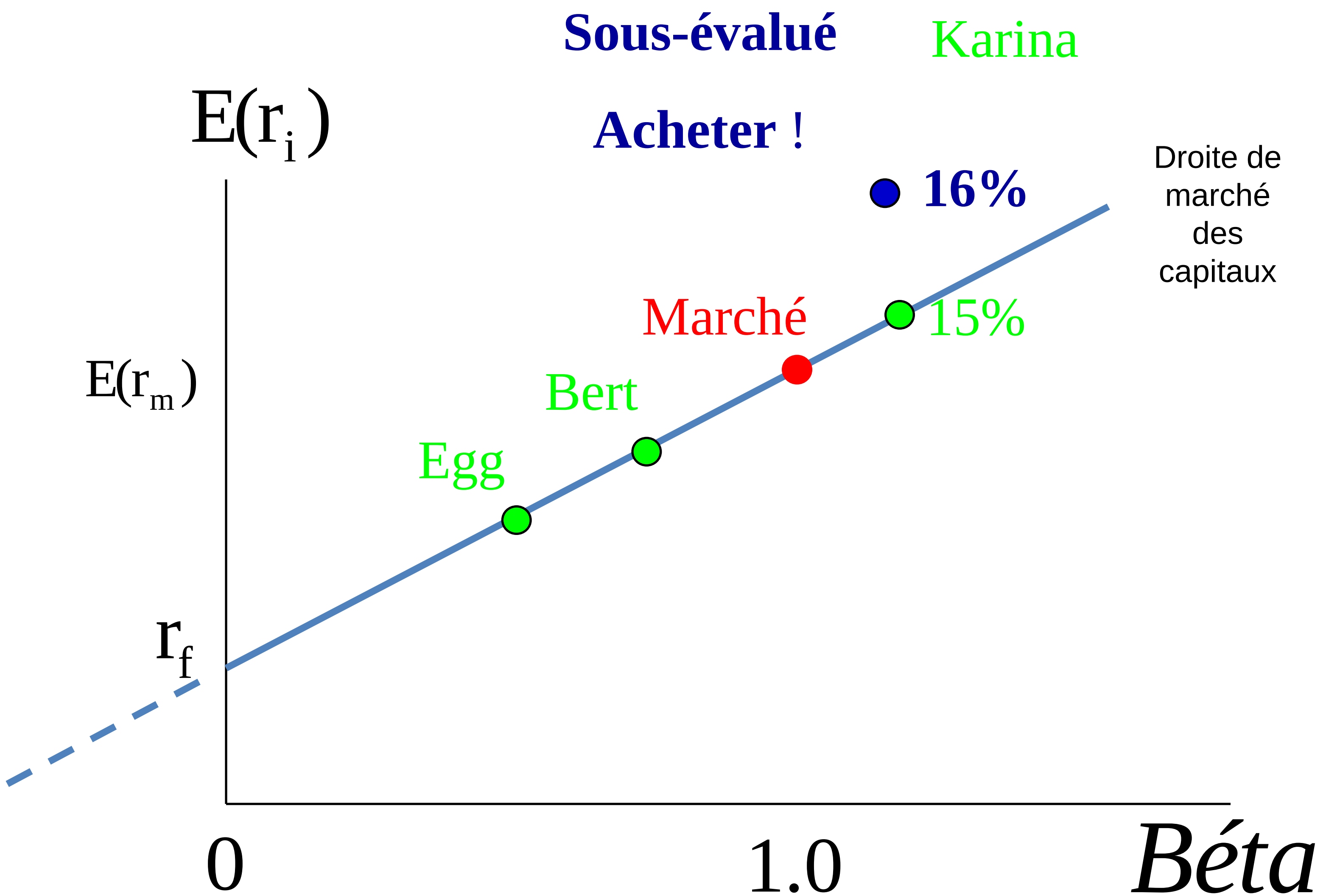
Actif	E(r)	Beta
Egg	0.07	0.50
Bert	0.10	0.80
Karina	0.16	1.30

$$Rf = [B_{Bert}\, E(R_{Egg}) - B_{Egg}\, E(R_{Bert})]/[-B_{Egg}(1-B_{Bert}) + B_{Bert}(1- B_{Egg})]$$
$$= .02$$

$$E(Rm) = (E(R_{Egg}) - (1- B_{Egg})\, Rf)/ B_{egg} = .12$$

$$E(R_{Karina}) = rf + B_{Karina}(E(Rm) - Rf)$$
$$= .02 + 1.3*(.12 - .02) = .15 < .16$$

Sous ou Sur évalué ?



Saïd Chermak infomaths.com

Un autre exemple

État de l'économie	Probabilité	Rendement Eggbert	Rendement Dingo	Taux sans risque
Mauvais	0.20	0.04	0.07	0.03
Bon	0.45	0.10	0.10	0.03
Excellent	0.35	0.22	0.19	0.03
Esperance de rendement		?	?	
Variance		?	?	
Coefficient de corrélation avec le marché		0.712	0.842	
Covariance avec le marché		0.0015	?	

Exemple

Si l'espérance de rendement du portefeuille de marché est de 9%

A) Déterminez la covariance entre l'espérance de rendement de Dingo et l'espérance de rendement du portefeuille de marché.

B) Déterminez l'espérance de rendement de Dingo en utilisant le MEDAF. Recommanderiez-vous à un investisseur d'acheter des actions Dingo? Justifiez votre réponse.

Solution :

- E(re) = 13,00%
- E(rd) = 12,55%
- Var(re) = 0,004860
- Var(rd) = 0,002365
- Écart type(re) = 0,069714
- Écart type(rd) = 0,048629
- Écart type du marché = 0,030220
- Variance du marché = 0,000913
- Covariance de Dingo avec le marché = 0,001237
- Beta de Dingo = 1,35
- Espérance de rendement du marché= 9%
- Espérance de rendement de Dingo avec le MEDAF:
- E(rd) = Rf + BetaDingo (Rm - Rf) = 11,13%
- **12,55% > 11,13% - Acheter!**