Evaluation des obligations

Relation taux requis-valeur dans le cas de l'intérêt composé

1. Notion d'obligation

L'entreprise qui souhaite s'endetter à long terme peut se tourner vers deux catégories de pourvoyeurs de fonds :

- les banques. Dans ce cas, l'entreprise contracte un emprunt indivis ;
- les obligataires. Dans ce cas, l'entreprise s'endette auprès d'une pluralité de prêteurs en émettant des obligations.

Le remboursement des obligations est généralement in fine. L'émetteur peut toutefois prévoir, comme pour un emprunt indivis, un remboursement par amortissements constants ou par annuités constantes. Dans ces 2 derniers cas, l'émetteur tire au sort, chaque année, les obligations qui seront remboursées. Ce nombre correspond au montant amorti (c'est-à-dire remboursé) au cours de l'exercice considéré rapporté à la valeur nominale de l'obligation.

Exemple

Emprunt obligataire de 15 M€ composé de 15 000 obligations dont la valeur nominal est de 1 000 €. Le taux facial est de 10% et la durée de vie de l'emprunt est de 10 ans. On se propose de présenter les tableaux d'amortissement et le nombre d'obligations remboursées chaque année dans les 3 cas suivants :
- *remboursement in fine*
- *remboursement par amortissements constants*
- *remboursement par annuités constantes*

Remboursement in fine					
Années	Reste à rembourser	Intérêts	Amortissements	Annuités	Nombre d'obligations remboursées
1	15 000 000	1 500 000	0	1 500 000	0
2	15 000 000	1 500 000	0	1 500 000	0
3	15 000 000	1 500 000	0	1 500 000	0
4	15 000 000	1 500 000	0	1 500 000	0
5	15 000 000	1 500 000	0	1 500 000	0
6	15 000 000	1 500 000	0	1 500 000	0
7	15 000 000	1 500 000	0	1 500 000	0
8	15 000 000	1 500 000	0	1 500 000	0
9	15 000 000	1 500 000	0	1 500 000	0
10	15 000 000	1 500 000	15 000 000	16 500 000	15 000
			TRI	10,0%	

Remboursement par amortissements constants					
Années	Reste à rembourser	Intérêts	Amortissements	Annuités	Nombre d'obligations remboursées
1	15 000 000	1 500 000	1 500 000	3 000 000	1 500
2	13 500 000	1 350 000	1 500 000	2 850 000	1 500
3	12 000 000	1 200 000	1 500 000	2 700 000	1 500
4	10 500 000	1 050 000	1 500 000	2 550 000	1 500
5	9 000 000	900 000	1 500 000	2 400 000	1 500
6	7 500 000	750 000	1 500 000	2 250 000	1 500
7	6 000 000	600 000	1 500 000	2 100 000	1 500
8	4 500 000	450 000	1 500 000	1 950 000	1 500
9	3 000 000	300 000	1 500 000	1 800 000	1 500
10	1 500 000	150 000	1 500 000	1 650 000	1 500
Total		8 250 000	15 000 000	23 250 000	15 000
			TRI	10,0%	

Remboursement par annuités constantes					
Années	Reste à rembourser	Intérêts	Amortissements	Annuités	Nombre d'obligations remboursées
1	15 000 000	1 500 000	941 181	2 441 181	941
2	14 058 819	1 405 882	1 035 299	2 441 181	1 035
3	13 023 520	1 302 352	1 138 829	2 441 181	1 139
4	11 884 691	1 188 469	1 252 712	2 441 181	1 253
5	10 631 979	1 063 198	1 377 983	2 441 181	1 378
6	9 253 996	925 400	1 515 781	2 441 181	1 516
7	7 738 215	773 822	1 667 359	2 441 181	1 667
8	6 070 856	607 086	1 834 095	2 441 181	1 834
9	4 236 760	423 676	2 017 505	2 441 181	2 018
10	2 219 255	221 926	2 219 255	2 441 181	2 219
Total		9 411 809	15 000 000	24 411 809	15 000
			TRI	10,0%	

NB : dans le cas du remboursement par annuité constante, celle-ci est égale à a qui vérifie :

$$a = \frac{15.000.000x10\%}{1-(1+10\%)^{-10}} = 2.441.181€$$

2. **Rappel sur l'évaluation d'une obligation à taux fixe**

La valeur d'un titre (par exemple une obligation) correspond à la somme des flux de trésorerie actualisés que ce titre procure à son propriétaire. Dans le cas d'une obligation, les flux de trésorerie correspondent au paiement des intérêts et au remboursement (ou à l'amortissement) du principal.

Dans l'hypothèse où l'obligation est remboursée in fine, le montant restant à rembourser est le même chaque année. Par conséquent les intérêts, dont le calcul est fondé sur le montant restant à rembourser, sont constants.

Ainsi, si V_0 désigne la valeur de l'obligation à la date t=0, c'est-à-dire le jour de son émission, V_0 vérifie :

$$V_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{Intérêts}{(1+i)^t} + \frac{Nominal}{(1+i)^n} = Intérêts.\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} + \frac{Nominal}{(1+i)^n}$$

Où n correspond au nombre résiduel d'années de vie de l'obligation.

Exemple

1. *Un investisseur souscrit à une émission obligataire. Il achète 1 obligation assimilable du Trésor (OAT), remboursable in fine, dont le nominal est de 2 000 €, le taux facial de 4% et la durée de vie de 5 ans. Vérifier que, lors de son introduction en bourse, le jour de l'émission, l'obligation cote 2 000 €*
2. *Le taux de référence des OAT est porté, au cours de la première journée de cotation, à 5%. Calculer à combien s'établit le nouveau cours de l'obligation.*
3. *En déduire la perte, en pourcentage, subie par l'investisseur*
4. *Que devient le cours de bourse de l'obligation au bout de 2 ans dans les hypothèses suivantes :*
   a. *Le prix de référence du marché obligataire (TMO) s'est maintenu à 4%*
   b. *Le prix de référence du marché obligataire (TMO) a été porté à 5%*

1. $V_0 = \sum_{t=1}^{5} \frac{2000x4\%}{(1+4\%)^t} + \frac{2000}{(1+4\%)^5} = 80.\frac{1-(1+0,04)^{-5}}{0,04} + \frac{2000}{(1+0,04)^5} = 2000€$

2. L'augmentation du taux de référence conduit les investisseurs à exiger un rendement plus élevé. Les flux futurs reçus par l'obligataire étant constants, l'augmentation du rendement se traduit par une baisse de la valeur du titre. Son nouveau cours est obtenu en modifiant le taux d'actualisation. Ainsi : $V_0 = 80.\frac{1-(1+0,05)^{-5}}{0,05} + \frac{2000}{(1+0,05)^5} = 1913€$

3. La perte est alors de 1913-2000 = -87 € soit $= \frac{-87}{2000} = -4.4\%$

1. Au bout de 2 ans, la durée de vie résiduelle de l'obligation est de 3 ans. Ainsi, en notant V_2 le nouveau cours de l'obligation

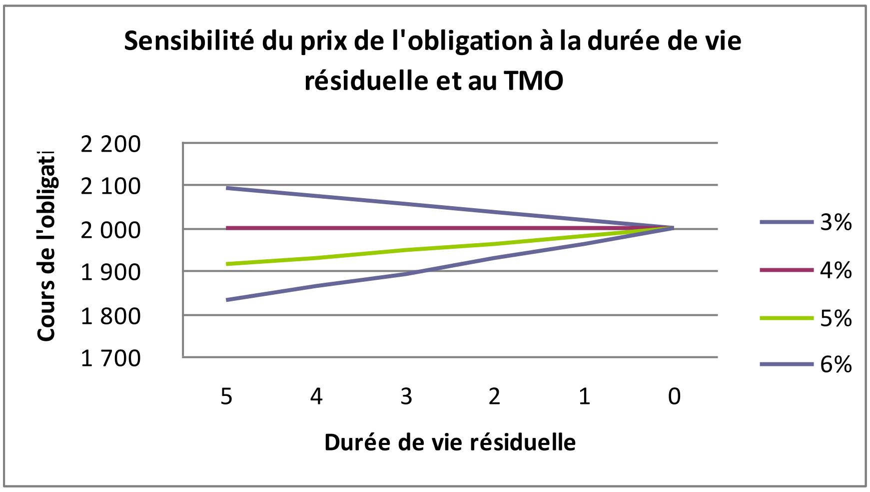
a. $V_2 = 80.\frac{1-(1+0{,}04)^{-3}}{0{,}04} + \frac{2000}{(1+0{,}04)^3} = 2000€$

b. $V_2 = 80.\frac{1-(1+0{,}05)^{-5}}{0{,}05} + \frac{2000}{(1+0{,}05)^3} = 1946€$

Le tableau ci-après propose une analyse de sensibilité de la valeur de l'obligation à la durée de vie résiduelle du titre et au TMO.

Taux de référence du marché	Durée de vie résiduelle					
	5	4	3	2	1	0
3%	2 092	2 074	2 057	2 038	2 019	2 000
4%	2 000	2 000	2 000	2 000	2 000	2 000
5%	1 913	1 929	1 946	1 963	1 981	2 000
6%	1 832	1 861	1 893	1 927	1 962	2 000

Le graphique ci-après, issu du tableau ci-dessus, montre que :



- Si le taux de référence du marché (TMO) est égal au taux facial (4%), la valeur de l'obligation est indépendante de sa durée de vie résiduelle.
- Plus la durée de vie résiduelle du titre et faible, moins son cours est sensible à une variation de taux.
- A l'échéance, le cours du titre correspond au nominal (2000 €) quel que soit le TMO du moment.

a. Taux de rendement actuariel brut (TAB) de l'obligation

Le TAB est le taux d'actualisation *i* qui permet d'égaliser :

- d'une part le prix *P* de l'obligation ;
- d'autre part la somme des flux de trésorerie futurs actualisés à percevoir jusqu'à l'échéance.

Dans l'hypothèse où la durée qui sépare la date d'évaluation de celle des prochains versements de flux de trésorerie (CF_1, CF_2,… , CF_n) est un nombre entier d'années :

$$P = \sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1+i)^t}$$

Ainsi, pour une obligation à remboursement in fine, dont la maturité résiduelle est de 3 ans et qui versera ses prochains intérêts dans 1 an, *i* vérifie :

$$P = \frac{Intérêts}{(1+i)^1} + \frac{Intérêts}{(1+i)^2} + \frac{Intérêts}{(1+i)^3} + \frac{Nominal}{(1+i)^3}$$

En revanche, si la date d'évaluation est le 2 avril 2009 et que la date de versement des prochains intérêts est le 2 mai 2009, ceux-ci sont actualisés sur 31/365° d'année.
Les intérêts suivants seront perçus dans 1 an + 31 jours soit en (1 + 31/365) année…
… puis dans 2 ans + 31 jours soit (2 + 31/365) année.

Dans ce cas :

$$P = \frac{Intérêts}{(1+i)^{\frac{31}{365}}} + \frac{Intérêts}{(1+i)^{1+\frac{31}{365}}} + \frac{Intérêts}{(1+i)^{2+\frac{31}{365}}} + \frac{Nominal}{(1+i)^{2+\frac{31}{365}}}$$

Plus généralement, en notant j le nombre de jours entre la date d'évaluation et celle du prochain versement de flux de trésorerie :

$$P = \sum_{t=1}^{n} \frac{Intérêts}{(1+i)^{t-1+\frac{j}{365}}} + \frac{Nominal}{(1+i)^{n-1+\frac{j}{365}}}$$

<u>Exemple</u>

Soit une obligation émise le 15/04/2007, remboursée in fine et dont la date de remboursement est le 15/04/2011. Les intérêts sont versés, chaque année le 15/04.
La valeur nominale de l'obligation est de 1 000 € et son taux facial de 5%.
Calculer le prix de l'obligation le 24/03/2009 si le taux de référence du marché obligataire (TMO) est de 6%. En déduire l'équation que vérifie le TAB et préciser la syntaxe à utiliser sur Excel pour déterminer le TAB

La durée restant jusqu'au prochain paiement d'intérêts est de 22 jours soit 22/365 année. Ainsi :

$$P = \frac{50}{(1+6\%)^{\frac{22}{365}}} + \frac{50}{(1+6\%)^{1+\frac{22}{365}}} + \frac{50}{(1+6\%)^{2+\frac{22}{365}}} + \frac{1000}{(1+6\%)^{2+\frac{22}{365}}}$$

Par conséquent :

P = 1028,05 €

Inversement, si le cours de l'obligation est de 1028.05 €, le TAB est le taux d'actualisation i qui vérifie :

$$1028{,}05 = \frac{50}{(1+i)^{\frac{22}{365}}} + \frac{50}{(1+i)^{1+\frac{22}{365}}} + \frac{50}{(1+i)^{2+\frac{22}{365}}} + \frac{1000}{(1+i)^{2+\frac{22}{365}}}$$

Pour résoudre cette équation, il convient d'utiliser la fonction TRI.PAIEMENTS d'Excel comme suit :

- Sur une feuille Excel, on saisit les dates et les flux correspondants, la valeur de l'obligation devant être signée négativement :

	A	B
1	24/03/2009	-1028,05
2	15/04/2009	50,00
3	15/04/2010	50,00
4	15/04/2011	1050,00

- Dans ce cas : i = TRI.PAIEMENTS(B1:B4 ; A1:A4).
- Excel fournit le résultat attendu soit i = 6%.

A noter que le prix payé intègre les intérêts courus dus au vendeur de l'obligation. Ce dernier doit, en effet, recevoir des intérêts du fait de sa qualité de créancier depuis le dernier détachement du coupon c'est-à-dire depuis le 15/04/2008. Depuis le dernier détachement, il s'est écoulé 343 jours. Compte tenu d'un délai de 3 jours entre la date de détachement et la date de règlement, les intérêts courus portent sur 346 jours, soit $\frac{346}{365} = 0{,}95\,année$

Le taux de coupon couru est donc égal à 0,95 x 5% = 4,493%. Le coupon couru est alors égal à 1 000 x 4,493% = 44,93 €

b. Obligations perpétuelles

Dans l'hypothèse du remboursement d'un crédit d'un montant nominal V par annuités constants a, il a été vu, au paragraphe précédent que :

$$V = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Si le nombre de paiements est infini, on parle de rente perpétuelle. Dans ce cas, si n tend vers l'infini $(1+i)^{-n}$ tend vers 0. Ainsi :

$$V = \frac{a}{i}$$

Les paiements annuels a correspondent uniquement au montant des intérêts. En principe l'obligataire ne sera pas remboursé. Par conséquent, en cas de besoin de liquidités, il devra revendre son titre. Il s'expose ainsi au risque de hausse des taux d'intérêt qui conduit à une baisse de la valeur de son titre.

A noter que l'entreprise émettrice peut prendre l'inititiative de rembourser l'obligation perpétuelle. C'est le cas lorsque, depuis l'émission du titre, le taux d'intérêt de référence (TMO) a baissé. A titre illustratratif, une entreprise a émis en

2005 des titres participatifs au taux facial de 5% pour 1 Md €. En 2009, le taux de référence est ramené à 4%. Dans ce cas, elle s'endette d'1 Md € à 4% et rembourse son emprunt à 5%. Elle reste ainsi endettée d'1 M€ mais paiera désormais des intérêts annuels de 1 000 000 x 4% = 40 K€ et non plus de 50 K€. On dit alors que l'entreprise refinance sa dette.

<u>Exemple</u>

Une obligation perpétuelle a une valeur nominale de 1 000 €. Son taux facial est de 4% et le TMO de 5%. Calculer le prix P de l'obligation

$$P = \frac{1.000x4\%}{5\%} = 800€$$

3. Duration

La duration est la durée moyenne d'attente, en années, pour percevoir les flux d'une obligation dont le prix est P et la durée de vie est n. Sa formulation, donnée par Macaulay en 1938, est la suivante :

$$\boxed{D = \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{t.CF_1}{(1+i)^t}}{P} = \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{t.CF_t}{(1+i)^t}}{\sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1+i)^t}}}$$

En développant les sommes, on a :

$$D = \frac{1.\frac{CF_1}{(1+i)^1} + 2.\frac{CF_2}{(1+i)^2} + \ldots + n.\frac{CF_n}{(1+i)^n}}{\frac{CF_1}{(1+i)^1} + \frac{CF_2}{(1+i)^2} + \ldots + .\frac{CF_n}{(1+i)^n}}$$

$$= \frac{1.\frac{CF_1}{(1+i)^1}}{\frac{CF_1}{(1+i)^1} + \frac{CF_2}{(1+i)^2} + \ldots + .\frac{CF_n}{(1+i)^n}} + \frac{2.\frac{CF_2}{(1+i)^2}}{\frac{CF_1}{(1+i)^1} + \frac{CF_2}{(1+i)^2} + \ldots + .\frac{CF_n}{(1+i)^n}} + \ldots +$$

$$\frac{n.\frac{CF_n}{(1+i)^n}}{\frac{CF_1}{(1+i)^1} + \frac{CF_2}{(1+i)^2} + \ldots + .\frac{CF_n}{(1+i)^n}}$$

La duration est ainsi la moyenne des dates de réception des flux de trésorerie (intérêts et remboursement du principal) pondérée par le poids de chaque flux de trésorerie actualisé dans l'ensemble des flux.

Dans l'hypothèse d'un zéro coupon, c'est-à-dire d'une obligation qui verse l'ensemble des flux (intérêts + remboursement du principal à l'échéance :

$CF_1 = CF_2 = \ldots = CF_{n-1} = 0$

Dès lors :

$$D = \frac{1.\frac{0}{(1+i)^1} + 2.\frac{0}{(1+i)^2} + \ldots + n.\frac{CF_n}{(1+i)^n}}{\frac{0}{(1+i)^1} + \frac{0}{(1+i)^2} + \ldots + .\frac{CF_n}{(1+i)^n}} = \frac{n.\frac{CF_n}{(1+i)^n}}{\frac{CF_n}{(1+i)^n}} = n$$

La durée de vie d'un zéro coupon est donc égale à sa duration.

4. Sensibilité

La sensibilité S d'une obligation exprime la variation relative (en %) du prix P d'une obligation pour une variation i du taux d'intérêt. Ainsi :

$$S = \frac{\frac{dP}{P}}{di} = \frac{1}{P}\frac{dP}{di} = \frac{1}{P}P'(i)$$

Or :

$$P = \sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1+i)^t} = \sum_{t=1}^{n} CF_t (1+i)^{-t}$$

Ainsi :

$$S = \frac{1}{P}\left[\sum_{t=1}^{n} CF_t (1+i)^{-t}\right]' = -\frac{1}{P}\left[\sum_{t=1}^{n} tCF_t (1+i)^{-t-1}\right] = -\frac{1}{1+i}\frac{1}{P}\left[\sum_{t=1}^{n} tCF_t (1+i)^{-t}\right]$$

$$S = -\frac{1}{1+i}\frac{1}{P}\left[\sum_{t=1}^{n} \frac{tCF_t}{(1+i)^t}\right]$$

Finalement :

$$\boxed{S = -\frac{1}{1+i}.D}$$

Cette formule montre que la sensibilité du prix d'une obligation à la variation du taux d'intérêt est d'autant plus forte que la duration est élevée.

Attention : cette relation est utilisable pour des petites variations du taux d'intérêt de référence (TMO)

Exemple

On considère une obligation dont les caractéristiques sont les suivantes :

1) *Nominal : 1000 €*

2) *Taux facial : 5%*

3) *Durée de vie : 4 ans*

4) *Remboursement in fine*

Le TMO est de 6%.

1. *Calculer la valeur de l'obligation à l'issue de la première journée de cotation, la duration et la sensibilité*

2. *Calculer la valeur de l'obligation si le TMO est porté à 6,1% et vérifier que la variation relative du cours, par rapport à celle de la première question, est cohérente avec la sensibilité*

1. La valeur de l'obligation est la somme des cash flows futurs actualisés à 6% soit 965 €, d'après le tableau ci-dessous.

Date t	CF_t	CF_t actualisé	$t.CF_t$ actualisé
1	50	47	47
2	50	44	89
3	50	42	126
4	1 050	832	3 327
Total		965	3 589

La duration est la somme des $t.CF_t$ actualisés rapportée à la valeur de l'obligation de 965 €. Ainsi, la duration est égale à D tel que :

$$D = \frac{3589}{965} = 3{,}72 ans$$

La sensisbilité S vérifie :

$$S = -\frac{1}{1+6\%}.3{,}72 = -3{,}51$$

2. Si le taux de référence (TMO) est porté à 6,01%, le tableau d'amortissement de l'emprunt obligataire devient :

Date t	CF_t	CF_t actualisé	$t.CF_t$ actualisé
1	50	47	47
2	50	44	89
3	50	42	126
4	1050	829	3 314
Total		962	3 576

La valeur de l'obligation est alors ramenée à 962 € ce qui représente une perte relative de valeur de :

$$\frac{962}{965} - 1 = -0{,}35\%$$

Ce résultat est cohérent avec la sensibilité obtenue. En effet :

$$S = \frac{\frac{dP}{P}}{di}$$

Donc :

$$\frac{dP}{P} = S.di = -3{,}51\% x 0{,}1\% = -0{,}35\%$$