Marchés financiers
et Finance de marché

Infomaths.com

Introduction

- Il convient désormais de présenter les principales notions et caractéristiques relatives aux différents titres.
- Il s'agit désormais d'évaluer:
  - les différentes classes de titres sont présentées dans leur identité (notion de valeur présente comme somme de valeurs futures actualisées) mais aussi dans leur irréductible diversité (produits d'investissement /financement contre produits de couverture de risques).

- 1-Titres de dettes

1 Obligations et titres de créances négociables

- Notions de base (à connaître/ à revoir)
  - Capital emprunté
    - Valeur nominal/faciale
    - Prix d'émission
    - Amortissement
    - Durée
    - Garanties
    - Revenus : date de jouissance, taux d'intérêt facial, périodicité(pré/postcomptés, emprunts 0 coupon)

1Obligations et titres de créances négociables

- Notions de base
  - Taux de rentabilité/ rendement actuariel : le taux obtenu en gardant l'obligation jusqu'à son remboursement et sous l'hypothèse d'un réinvestissement des intérêts à ce taux (cf :infra)
  - Marge actuarielle ou spread
    - Qualité de la solvabilité , échéance du titre
  - Marché secondaire, un cout d'opportunité pour l'investisseur
  - Techniques de cotation : cotation pied de coupon

1 Obligations et titres de créances négociables

- Volatilité des titres de dettes
  - Risque de taux
  - Risque de réinvestissement des coupons

  pour les titres à taux fixes

  - Risque de solvabilité

  pour les titres à taux variables…privés, naturellement

1 Evaluation des titres de dette

- Prix d'une obligation :
  - Prix d'une obligation à t. fixe (« t » durée jusqu'au prochain détachement de coupon ; c'est donc un entier ou un fractionnaire)
  - La valeur d'un titre est **aujourd'hui** la somme des cash flows **futurs** actualisés

$$P = \sum_{i=0}^{n} \frac{C}{(1+R)^{t+i}} + \frac{V}{(1+R)^{t+n}}$$

1 Evaluation des titres de dette

- Prix d'une obligation :
  - Le Taux de rendement actuariel est un taux de rendement interne, taux obtenu si l'obligataire conservait ses titres jusqu'à échéance
  - Égalise le prix du marché de l'obligation et la somme des flux futurs générés, coupon et remboursement final
  - Exemple : oblig au pair, 2 ans, coupon 5% , prix de marché 97%

$$97 = \sum_{i=1}^{2} \frac{5\%}{(1+R)^i} + \frac{100\%}{(1+R)^2} \Rightarrow r = 6,65\%$$

1 Risque de taux

- Risque de taux
  - Le risque de taux est potentiel pour un emprunteur ou un prêteur à taux fixe, il est réel pour un emprunteur ou prêteur à taux variable (sauf rachat de la dette ou du prêt au prix du marché)
  - Le Risque de taux est différent à la hausse ou à la baisse si on est emprunteur ou prêteur
    - Effet « balançoire » la relation entre taux et prix ; prenons l'exemple avec 5 et 6% , une hausse des taux intervenant entre « t » et « t+1 »pour des obligations à 9 ans :

$$\frac{(1+5\%)^9}{P} = \frac{(1+6\%)^9}{100} \Rightarrow P = 91{,}82\%$$

1 Risque de taux

- Risque de taux :
  - Enfin la relation taux /prix est modélisée par un instrument essentiel : la duration, définie et reliée à la « sensibilité » simple par les deux formules explicitée en classe

$$D = \frac{1}{P_0} \sum_{1}^{N} \frac{CF_i i}{(1+r)^i} \quad (1)$$

$$D = -S(1+r) \quad (2)$$

1 Mesures de sensibilité

- **Duration, convexité, immunisation**
- Calcul pour une obligation N=5 ans, taux du coupon 10% au pair, taux d'intérêt actuel = 8%

année	flux	vp	fraction de la vp	t*fraction vp
1	10	9,26	8,57	0,0857
2	10	8,57	7,94	0,1588
3	10	7,94	7,35	0,2205
4	10	7,35	6,81	0,2723
5	110	74,86	69,33	3,4664
	total:	**107,99**	**100**	**4,2**

si les taux varient de 1% la valeur de l'ob. varie de 4,2*1/1,08:

-3,88888889 %

Mais le calcul effectué avec 9% donne un chiffre légèrement différent : -3,79%

1 Evaluation des titres de dette

- Notion de Structure par terme des taux :
  - Taux à terme et courbe de taux :
  - La Stratégie d'un agent investissant à deux ans doit déboucher sur l'équation d'équilibre suivante:

$$\left(1+{}_0r_2\right)^2=\left(1+{}_0r_1\right)\left(1+{}_1r_1\right)$$

  - Celle-ci permet d'extraire les taux courts futurs anticipés implicites appelés taux terme à terme ou taux forward-forward
  - Ces taux sont à la base des opérations de couverture simple

1 Evaluation des titres de dette

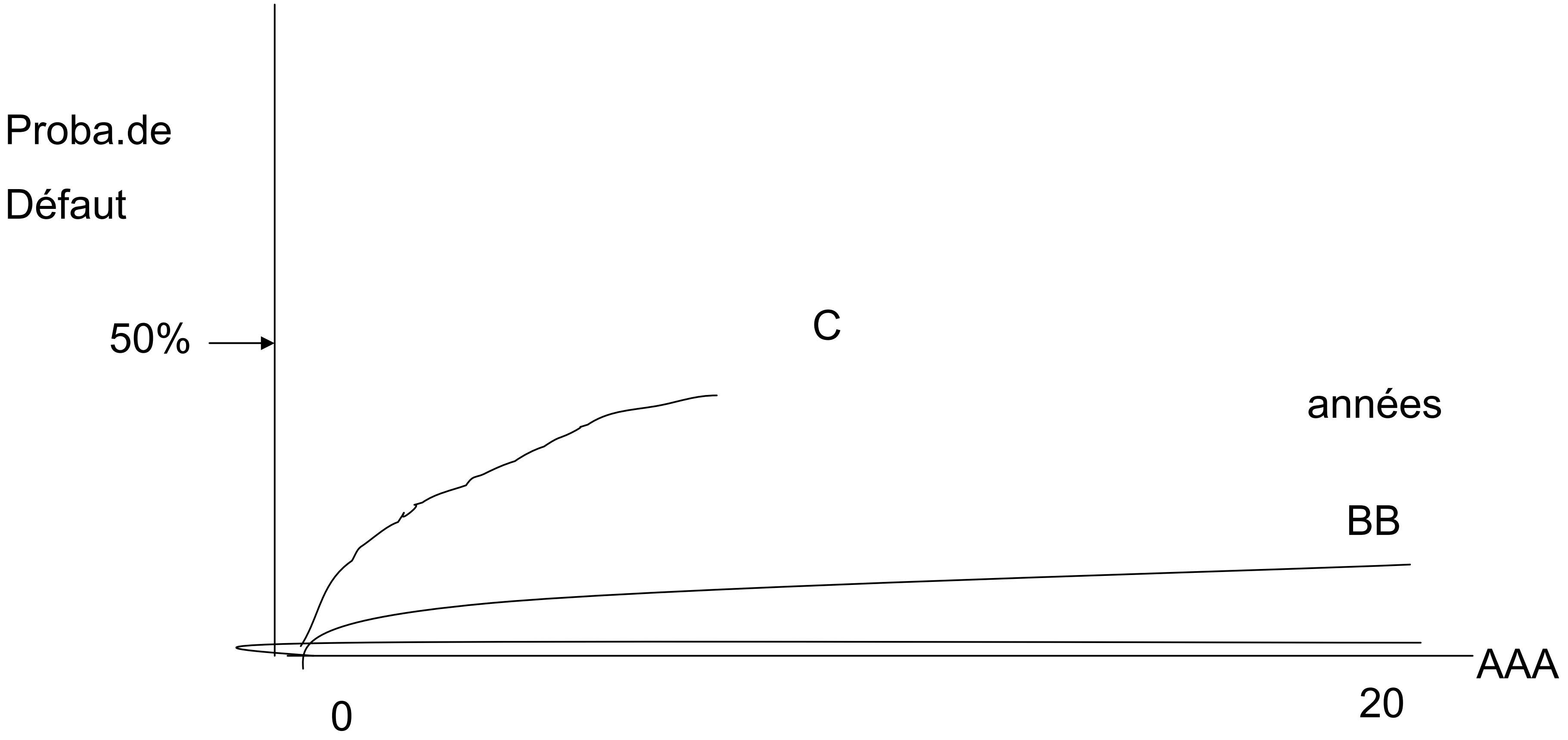
- Notion de Structure par terme des taux :
  - Eléments d'explication de la structure à terme

  - L'approche mathématique en continu sera présentée dans un document qui vous a été distribué ou le sera très prochainement sur les «Fondements théoriques des modèles de taux», un des piliers théoriques et pratiques de la finance de marché.

1 Risque de taux

- Risque de contrepartie / solvabilité :
  - Définition et notion de spread (différence titre d'Etat et titre privé correspondant)
  - Notation des émetteurs à partir d'un scoring
  - Les agences de rating (Moody's, SPoor's) élaborent des tables de notation pour l'endettement (long et court)
  - Elles mesurent des probabilités de défaut (de Aaa à C pour Moody's) : cette note influe sur le coût moyen pondéré du capital obtenu par la firme

1 Risque de défaut et note Standard Poor's



- 2-Titres de propriétés

Analyse financière des actions

- L'analyse financière dispose de plusieurs méthodes pour évaluer une société et ses actions. Les plus courantes reposent sur l'actualisation
  - des revenus futurs attendus (dividendes, bénéfices, capacité d'autofinancement selon les méthodes)
  - et d'une valeur finale à la revente,
- en utilisant un taux d'actualisation incluant une prime de risque
- Dans certains cas, lorsque la société est en voie d'être reprise, ou au contraire va cesser ses activités, on évalue aussi les éléments actifs et de passif du bilan.
  - Si l'action est cotée en bourse, sa valeur est bien entendu le cours de bourse. On peut cependant évaluer un cours potentiel en utilisant les fondamentaux économiques (revenus futurs...) indiqués plus haut,un coefficient financier (par exemple PER) théorique, la prise en compte des éléments psychosociologiques tels que le profil boursier de l'action, les tendances de marché etc., des domaines désormais très largement étudiés...

Pour les actions, l'évaluation financière consiste d'abord à déterminer la valeur d'une entreprise. Trois familles de méthodes sont utilisées :

1 L'approche patrimoniale basée sur la valeur comptable du bilan de l'entreprise (une entreprise qui a 100 millions d'Euros de fonds propres est évaluée à 100 millions d'Euros). C'est une approche très artificielle puisque la valeur comptable ne reflète pas la valeur économique.

2 L'approche par les multiples se base sur des critères de comparaisons.

Les multiples boursiers : - on sélectionne un groupe d'entreprises comparables (même secteur, position de marché équivalente, etc) - on détermine des multiples boursiers pour celles de ces entreprises qui sont cotées en bourse. Les multiples les plus utilisés sont

le P/E (price/earnings ratio, i.e. capitalisation boursière / résultat net),

le P/B (price to book, i.e. capitalisation boursière / fonds propres),

Valeur d'entreprise (= capitalisation boursière + valeur de marché de la dette) / Chiffre d'affaires,

Valeur d'entreprise / EBITDA ou EBIT.

- on applique, à l'entreprise que l'on cherche à évaluer, ces multiples calculés pour des entreprises comparables. Par exemple, si l'entreprise non cotée A a des revenus de 100 millions d'Euros et est très comparable à une entreprise cotée qui a un VE/Revenues de 2x, alors la méthode des multiples boursiers tend à dire que A vaut 200 millions d'Euros.

On notera toutefois qu'une action non cotée n'a pas la même liquidité pour le porteur qu'une action cotée et par ailleurs ne peut pas faire l'objet d'OPA ou OPE. Cela fait qu'on appliquera une certaine décote à cette estimation. Un indice est désormais publié des valorisations appliquées sur les entreprises de taille moyenne

Les multiples de transaction : Approche similaire aux multiples boursiers, à ceci près que les multiples sont déterminés à partir de transactions observées sur le marché. Par exemple, si l'entreprise A a des revenus de 100 millions d'Euros et est très comparable à une entreprise qui a des revenus de 150 millions d'Euros qui a été vendue peu de temps auparavant à 300 millions d'Euros, alors la méthode des multiples de transaction tend à dire que A vaut 200 millions d'Euros (100 x(300/150)).

- **3 Actualisation des flux monétaires (DCF : Discounted Cash-Flows)** Cette approche consiste à déterminer les flux monétaires futurs et à les actualiser au taux du coût du capital.
- Concernant la rentabilité intrinsèque de l'entreprise, il s'agit des cash-flow (marges brutes d'autofinancement) libres dégagés par son exploitation.
- Concernant la rentabilité extrinsèque, autrement dit celle pour l'actionnaire, il s'agit des dividendes attendus et éventuellement de la valeur de revente espérée en fin de détention.
- - *Determination des flux monétaires futurs* Pour cela on construit un modèle financier qui donne des prévisions sur un futur plus ou moins lointain. Puis, si on utilise la méthode intrinsèque, on calcule pour chaque année future les cash-flows associés :

  Revenu d'exploitation (1-Taux d'imposition)

  \+ Amortissements & Dépréciation

  \- Capex (Capital Expenditure, i.e. investissement productif)

  \- Variation du BFR (Besoin en Fond de Roulement)

  = Cash-Flows libres

- *Détermination du coût du capital* La méthode la plus utilisée est celle du WACC (Weighted Average Cost of Capital, ou Coût Moyen Pondéré du Capital)
  - WACC = Kd x (1- Taux d'imposition) x (D/D+MV) + Ke x (MV/D+MV)
  - avec Kd = Coût de la dette (taux d'intérêt annuel payé sur la dette)
  - Ke = Coût des Fonds Propres (cf ci-dessous pour son calcul)
  - D = Valeur de marché de la dette (généralement la valeur comptable)
  - MV = Valeur de marché des Fonds Propres (Capitalisation boursière)
- Ke = rf + Beta (rm - rf)+ Prime
  - avec rf = taux sans risque (généralement le taux des obligations d'État à 20 ans) rm-rf = prime de risque de marché
  - Beta = beta de l'entreprise
  - Prime = prime liée au pays ou à la liquidité
- *Déterminaion de la valeur terminale* On utilise souvent la formule de Gordon Shapiro sur le cash-flow récurrent de l'entreprise (celui observé après de nombreuses années)
  - VT = Cash-Flow récurrent / (Cout du capital - croissance sur le long terme)
- *Déterminaion de la valeur de l'entreprise* A partir des éléments précédents, on obtient :

$$EV = \sum_{i=1}^{n} \frac{CF_i}{(1 + CapCost)^i} + ValTer$$

- La méthode de **Gordon et Shapiro** est un modèle d'actualisation des actions particulièrement connu. Il porte le nom de ses auteurs et a été mis au point en 1956.
- Ce modèle, dit aussi de "croissance perpétuelle", ne tient pas compte des plus values.
- En effet, il considère que lorsque le flux de dividendes est perpétuel (c'est-à-dire qu'il tend vers l'infini), la plus value n'a pas d'incidence sur l'évaluation de l'action.

Description : La formule proposée par Gordon et Shapiro est la suivante :

$$P_0 = \frac{D}{K_c - g}$$

- dans laquelle :
- P0 = valeur théorique de l'action
- D = dividende anticipé de la première période
- Kc = Taux de rendement attendu pour l'actionnaire
- g = Taux de croissance des dividendes

- 3-Produits dérivés

- Produits dérivés
- Contrats fermes et swaps
- Options

3 Contrats fermes

- Principes de base et évaluation
  - Définition : promesse de livrer/recevoir des titres/indices/… sous jacents
  - Principe de la vente à découvert
    - Trois façons d'honorer le contrat : position inverse prise avant l'échéance ou cash settlement, ou livraison physique.
    - Attention aux manipulations de cours, par corner and squeeze (achat à terme d'or et limitation des quantités mises sur le marché) : sumitomo a profité de sa situation sur le marché du cuivre, les frères hunt sur celui de l'étain

3 Contrats fermes

- Principes de base et évaluation
  - Définition de la relation de cash and carry et évaluation des contrats à terme
    - Une relation d'arbitrage fondamentale:
      - Ex/ se garantir le prix d'achat d'une action pendant un an soit on achète le contrat à terme ferme soit on emprunte et on achète l'action
    - Evaluation des contrats :

      prix d'un contrat à terme ferme = prix comptant + coût du portage

3. détermination des prix

- Prix forward pour un actif d'investissement:
  - Hypothèses (pas de coûts de transaction, identité des taux d'emprunt et de prêt,taux d'imposition sur les profits est identique pour tous, , AOA…)
  - Notation :
    - T: maturité
    - F_0: prix du future/forward aujourd'hui
    - S_0: prix spot du ss jacent
    - r: taux d'intérêt annuel continu pour un emprunt de T années

3.Futures et forward: détermination des prix

- *De façon générale, toute stratégie de ce type (ou une stratégie opposée,i.e. vente des actions, prêt à 5% et achat de contrat) est conditionnée par une relation entre les prix du forward et le coût de l'investissement*:

$$\mathbf{F_0 = S_0 \exp (rT)}$$

- Si F_0 est supérieur à S_0 exp rT, alors stratégie de vente du forward et achat de l'actif; et vente de l'actif à découvert en cas inverse; dans notre exemple $F_0 = 40\exp(0.05*0.25)=40.5$
- Si les ventes à découvert ne sont pas possibles, l'opération est plus « difficile » mais la relation précédente n'est pas remise en cause du moment qu'il y a un marché OTC composé d'intervenants désireux de faire un profit sans risque en utilisant des actifs d'investissement.

3-suite

- Evaluation des contrats forward sur actifs d'inves-tissement ou de consommation :

  si « f » désigne la valeur d'un contrat aujourd'hui, K le prix de livraison alors, pour une position longue, on a :

$$f= (F_0-K) \exp(-rT)$$

Quand le contrat est négocié, on a par définition, à la date de négociation initiale, le résultat suivant :

$$K= F_0 \text{ et donc } f=0.$$

Ensuite, il peut avoir une valeur positive ou négative, puisque F_0 change. Valeur d'une position courte :

$$f= (K-F_0) \exp(-rT)$$

3.3-suite

- F_0 diffère selon les types de futures ou forward et de ASJ considérés (avec revenu discret, continu,..).

3 Contrats futures et forwards

- Principes de base et évaluation
  - Différents types de contrats à terme fermes
    - Contrats à terme sur produits et mat.prem.
    - Contrats sur indices boursiers
    - Contrats à terme de change
    - Produits de taux :
      - Contrats à terme fermes :
        - Taux longs (notionnel)
        - Taux court
      - Forward rate agreement

3 swaps

- Swaps: Principes de base et évaluation
- Définition : un échange :
    - de dettes libellées dans deux devises différentes,
    - de flux financiers taux fixes contre variables
    - ou de flux libellés en deux taux variables différents

- Contrat ferme et irrévocable
- Caractéristiques:
    - Montant nominal
    - La ou les devises
    - Les taux de référence

3-Justification des swaps

-Le schéma de base (la situation des deux firmes sur le marché) est le suivant :

	fixe	flottant	Rating:
A	10,0	Libor 6 mois +0,3	AAA
B	11,2	Libor 6 mois +1%	BBB

3-Justification des swaps

- *B veut emprunter à taux fixe et A veut emprunter à taux variable*

- Elles vont faire le contraire de leur situation en jouant leur avantage comparatif respectif :

A va emprunter à taux fixe et B va emprunter à taux variable; A verse à B le Libor et B verse à A du taux fixe, 9,95%.

- Elément clé : les différences de taux sur les marchés respectifs.

3-justification

- Les flux financiers des deux firmes sont alors :

-**Société A** :

-paye 10% au marché
-reçoit 9,95 de B
-paye Libor à B

Total : elle paye Libor +0,05, soit 25 points de moins que le taux initial.

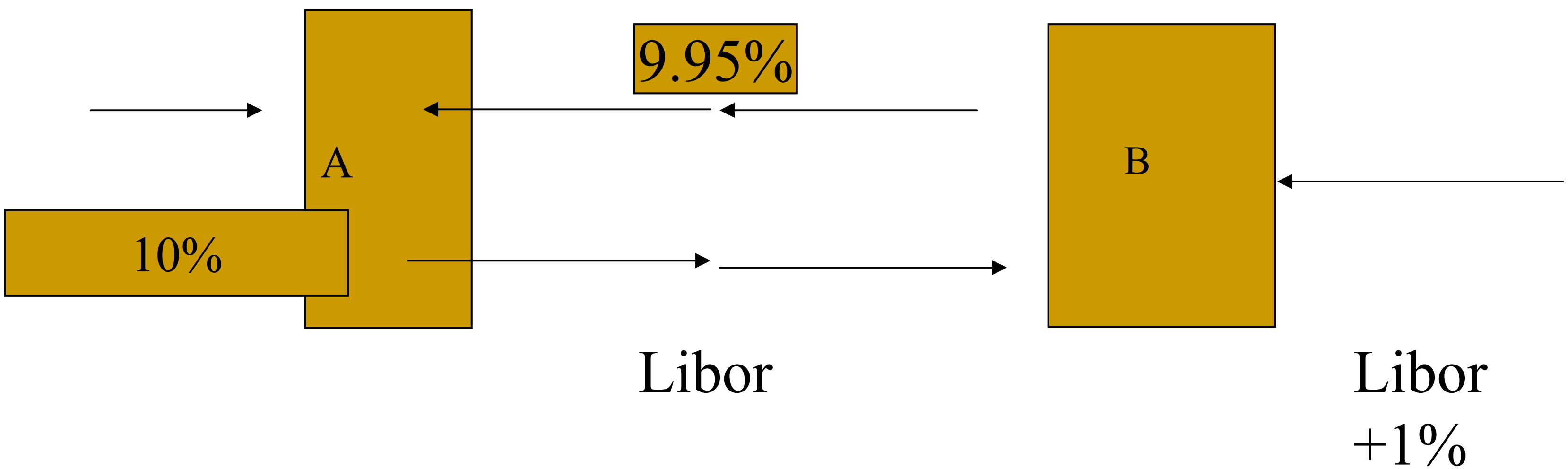
-**Société B** :

-paye Libor +1 % au marché
-reçoit Libor de A
-paye 9,95% à A

Total : elle paye 10,95 soit 25 points de moins que le taux fixe initial

- exemple

(pas d'intermédiaire financier)



Swap 1

3-La justification des swaps

- Gain total à se partager :

  0.5=(11.2%-10%)-((libor+100)-(libor+30))

- Comment se fait le partage de la rente de 50 points de base?

3-La justification des swaps

-Pourquoi une telle différence de rating obtenu par les deux firmes entre le marché long terme et marché du crédit court terme ?

-La réponse : à court terme, on peut modifier les conditions de taux en cas de dégradation, et la proba de défaut ans les 6 mois est considérée comme faible; elle augmente avec l'horizon.

3 Swaps

- Les risques des swaps
  - Faibles car :
    - pas d’échange en capital,
    - Réciprocité des engagements
    - Risques juridiques (mais règles de ISDA)
- Evaluation
  - Valeur nulle en début de période
  - Différentes techniques d’évaluation pour les flux ultérieurs
- Autre Catégorie de swaps: les dérivés de crédit
  - Définition

3 Contrats optionnels

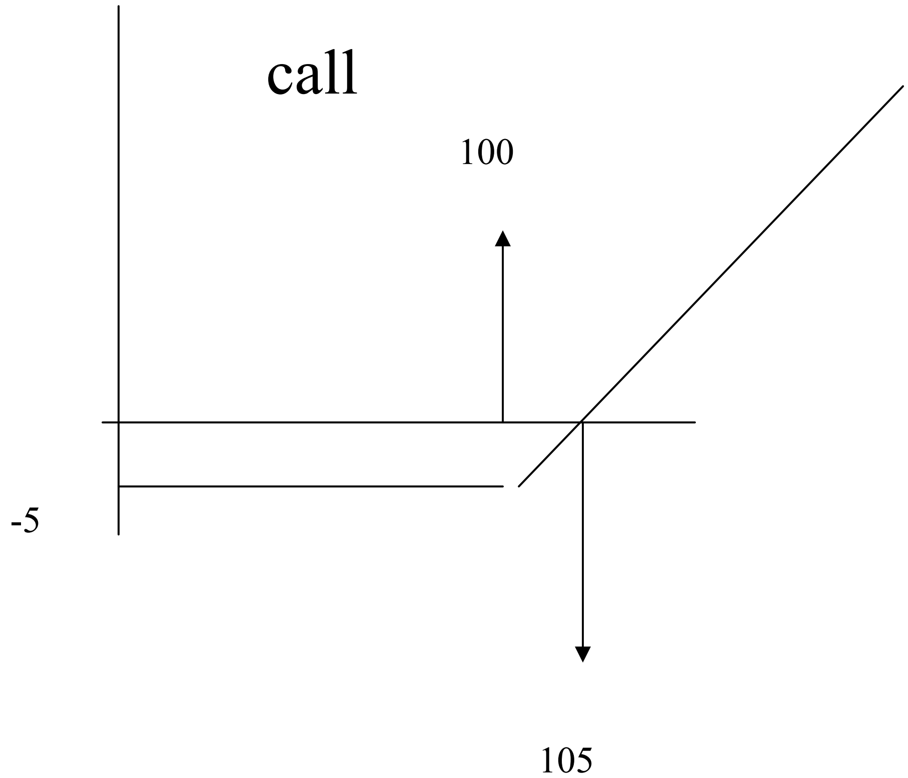
- Quelques questions:
- Qu'est-ce qu'une option?
  - Définition
- Stratégies de base
  - Achat de call/put
  - vente de call/put
- Que vaut une option ?

3 Contrats optionnels

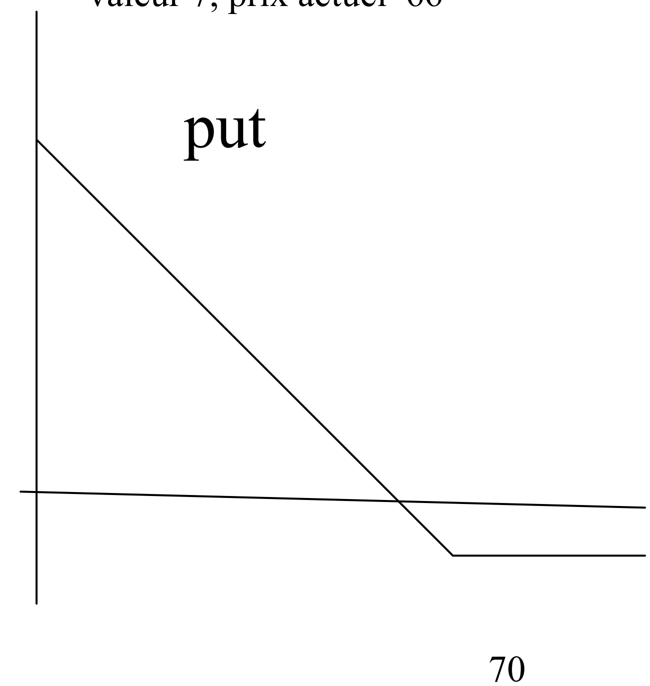
- Les Options : Définition et caractéristiques
  - Un droit d’acheter ou de vendre à certaines conditions de temps, pour un prix convenu
  - historique : de l’Antiquité à 1973
  - les grands concepts et les définitions : call, put prix d’exercice, date d ’expiration/maturité
  - Américaines contre européennes
  - droits et devoirs des acheteurs et vendeurs d’options: le détenteur a le droit de faire, le vendeur doit livrer
  - les options ont un coût contrairement aux futures /forwards

Exemple de pay-off (acheteur)

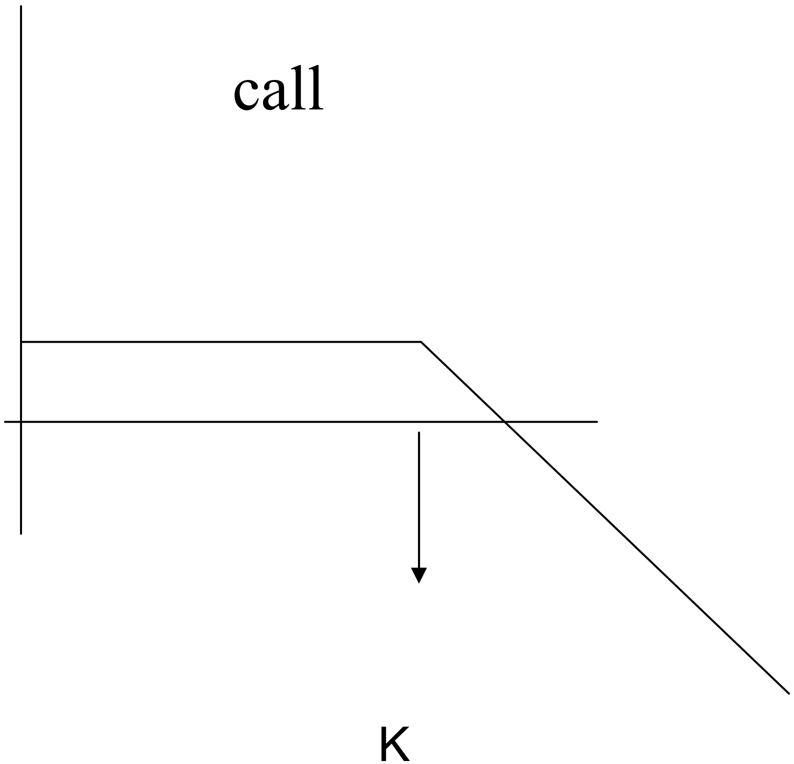
Call européen sur IBM , strike 100,
valeur 5 maturité 3 mois par ex.

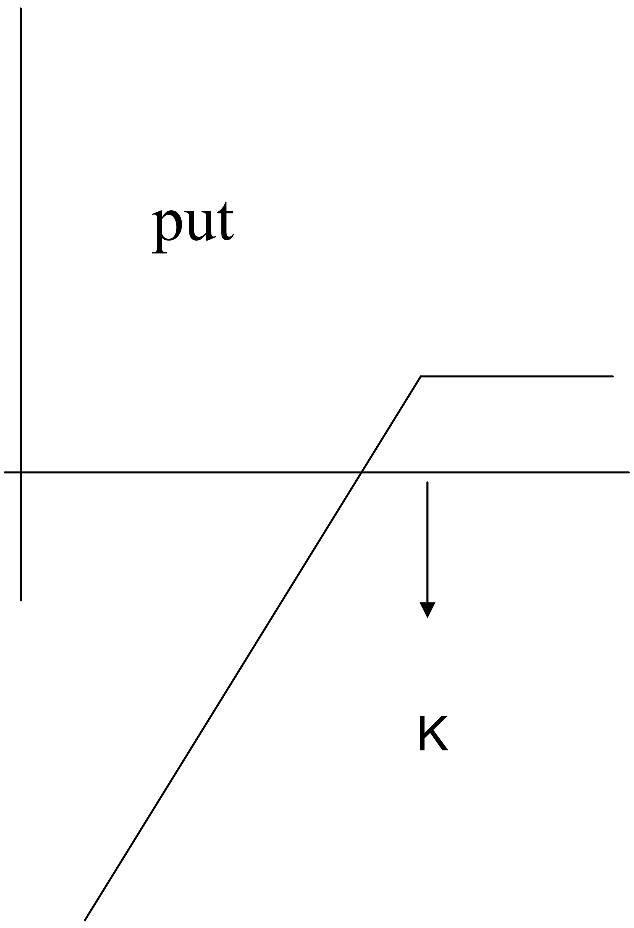


Put sur EXXon, strike 70, ,
valeur 7, prix actuel 66



Exemple de pay-off (vendeur d'options)





Contrats optionnels

- Les quatre positions possibles en options sont donc : position longue/courte en call/put, avec des risques différents
- Mathématique des Pay off:
  - position longue call : $\text{Max}(S_T\text{-}X,0)$
  - position courte call :- $\text{Max}(S_T\text{-}X,0)= \min(X\text{-} S_T ,0)$
  - position longue put : $\text{Max}(X\text{-}S_T,0)$
  - position courte put : $-\text{Max}(X\text{-}S_T,0) =\min (S_T\text{-}X,0)$

3 Contrats optionnels

- Exemple : prix courant septembre actions B. 78 euros ; achat de call décembre strike 80, pour 3 euros
- Investissement possible de 7800 euros

  1- Soit dans 2600 calls

  2- Soit dans 100 actions
- Si l'action monte jusqu'à 90, gain, dans cette première stratégie, de 2600*10- 7800= 18200 euros, soit 15*plus que dans l'achat de l'action elle-même qui aurait rapporté seulement 100*(90-78)=1200 euros

3 Contrats optionnels

- Les Actifs sous jacents possibles :
  - *Actions :* CBOE, Philadelphie, American stock exchange, Pacific stock exchange et en Europe: Liffe Londres, Amsterdam, Frankfurt;
  - Généralement, la quotité est de 100 actions
  - *Devises:* Aux USA, Philadelphie, en Europe Londres et Amsterdam; la taille des contrats d'options est variable (31250 livres aux USA, par exemple)
  - *Indices :* le plus populaire SP500; puis les autres : Nasdaq 100 et DJ.; Lieu de cotattion : CBOE.
  - Le SP 500 est européen, le SP 100 est américain. Principe: achat/vente de 100* l'indice,règlement en « cash ».

3 Contrats optionnels

- Actif sous jacents (suite) :
  - *Futures*: le future mature peu de temps après l'option. Il y a cohérence entre les marchés de futures et les marchés d'options, qui coexistent dans la même Bourse(cf Liffe);
  - quand un call est exercé, le détenteur de l'option a une position longue dans un future plus du cash: la différence entre le prix du future et le prix d'exercice ; si le put est exercé, le détenteur de l'option a une position courte en le future plus du cash: la différence entre le prix d'exercice et le prix du future

Contrats optionnels

- Spécifications des options sur Actions
  - *Prix d'exercices:* les prix d'exercice des options sont séparés par des intervalles de 2.5, 5 ou 10 dollars, euros, livres…Connectez vous sur les différentes bourses!
  - Quand une nouvelle date est introduite, les deux /trois plus proches strikes sont sélectionnées par les autorités de marché. On tient compte des « sauts » de prix
  - *Terminologie*: tous les puts ou calls d'une même action s'appellent une classe d'options, tandis que les options d'une classe ayant le même prix d'exercice et la même maturité s'appelle une série d'options.
  - *In/At/ Out*: si une option était exercée immédiatement, en fonction de son pay-out, elle est dans, à, ou hors la monnaie. Une option n'est exercée rationnellement que lorsqu'elle est dans la monnaie.

Contrats optionnels

- Spécifications des options sur Actions
  - *Valeur intrinsèque et valeur temps:* la valeur intrinsèque = Max(0, valeur si l'option est exercée immédiatement)
    - Pour un call: Max(S-K, 0)
    - Pour un put : Max(K-S,0)
  - Une options américaine « in » doit valoir au moins sa valeur intrinsèque. La valeur temps provient des mouvements de cours qui rendent possible une augmentation de la valeur de l'option
  - La valeur d'une option est donc la somme de sa valeur intrinsèque et de sa valeur temps.

Contrats optionnels

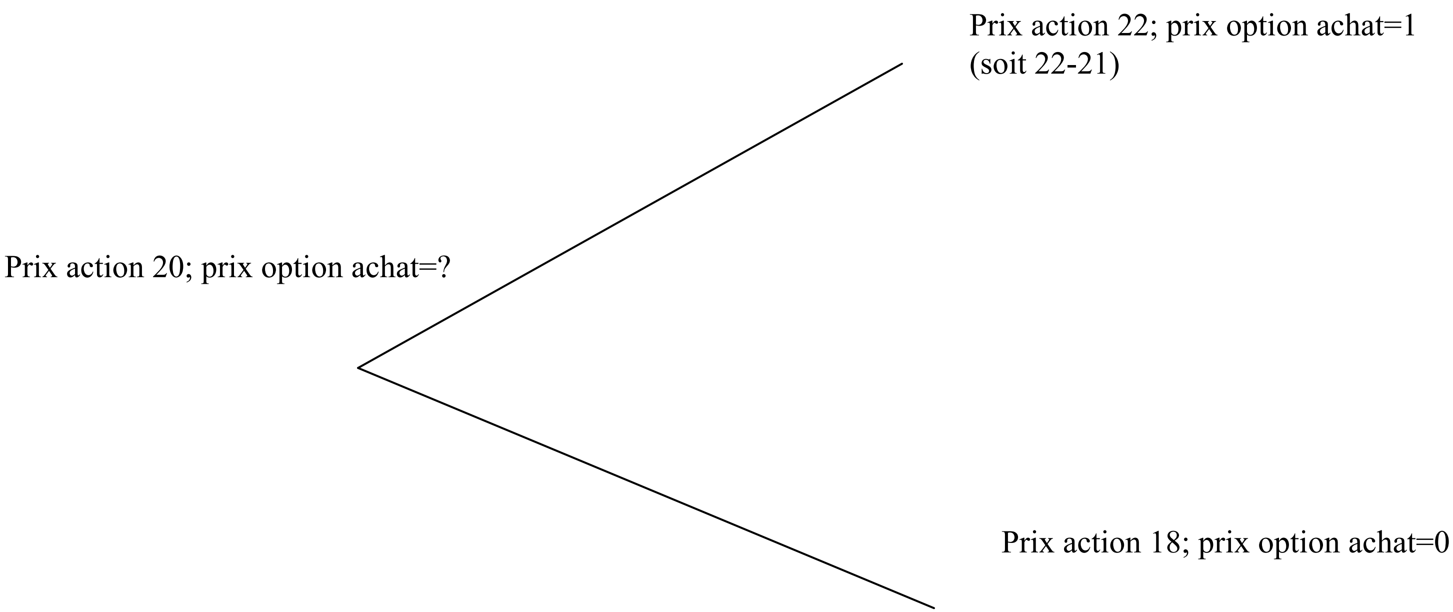
Déterminants des prix d'options :

	e call	e Put	A call	A put
Prix spot	+	-	+	-
strike	-	+	-	+
maturité	?	?	+	+
vol	+	+	+	+
Taux sans risque	+	-	+	-
dividendes	-	+	-	+

Modèle binômial

Modélisation binômiale

- Première approche des Modèles discrets : Arbre binômial à la CRR 1979
- Cas: évaluation d’un call européen; achat d’une action à trois mois pour un strike de 21; prix spot :20



Modélisation

- Hypothèses :
- Pas d'opportunités d'arbitrages
- Pas d'incertitude et donc pas de risque accepté; le rendement doit être celui du taux sans risque, égal ici à 12%.
- Un portefeuille est composé de titre et d'option(s)
- on peut alors calculer la mise en place du portefeuille et donc le prix de l'option.
- il y deux actifs et deux possibilités/scénarios : il est donc toujours possible de créer un portefeuille sans risque (complétude des marchés).

- Soit un portefeuille de Δ actions achetée (Δ est une quantité) (position longue) et d'un call vendu (position courte);
- Le raisonnement est identique si la stratégie inverse est faite
- Δ est choisi de sorte que le portefeuille soit sans risque
- il est tel que la valeur du portefeuille reste constante, quelque soit l'état du monde :
- Si le cours progresse de 20 € à 22 €, la valeur des actions est alors de 22Δ € et le call vaut 1 €.
- La valeur du portefeuille est alors de $22\Delta - 1$.
- Si le cours de l'action baisse de 20 € à 18 €, la valeur des actions est de 18Δ et celle de l'option est nulle .
- La valeur du portefeuille est dans ce cas 18Δ.
- Le portefeuille est sans risque si Δ vérifie l'égalité suivante:

$$22\Delta - 1 = 18\Delta$$

d'où $\Delta = 0.25$

Donc un portefeuille sans risque est caractérisé par :
L'achat de 0.25 action et la vente d'une option (call).

Si le cours de l'action est de 22 € , alors la valeur du portefeuille est de: (22*0.25)-1 = 4.5 €

Si le cours de l'action tombe à 18 €, alors la valeur du portefeuille est de :(18*0.25) = 4.5 €

Que la valeur de l'action augmente ou diminue la valeur du portefeuille est toujours de 4.5 €.

En l’absence d’arbitrage, un portefeuille sans risque doit rapporter le taux sans risque .

Si dans notre cas on avait un taux sans risque de 12% par an, alors la valeur du portefeuille aujourd’hui serait la valeur actualisée de 4.5.
On a donc

$$4.5e^{-0.12\times\frac{3}{12}} = 4.367$$

La valeur de l’action aujourd’hui est connue et égale à 20 €.
Si *f* désigne la valeur de l’option à la date 0, la valeur du portefeuille à cette date est:

$$20 \times 0.25 - f = 5 - f$$

$$\text{d'où } 5 - f = 4.367\ €$$

$$\text{soit } f = 0.633\ €$$

- En effet,
- En l’absence d’opportunités d’arbitrage la valeur de l’option doit être 0.633 €
  - si elle était supérieure, le portefeuille couterait moins de 4.367€ à sa création et rapporterait donc plus que le taux sans risque.
  - Si elle était inférieure, une position courte sur le portefeuille équivaudrait à un emprunt inférieur au taux sans risque.

Généralisation

Considérons une action de prix S_0 et une option sur cette f action de valeur f

Supposons que l'option arrive à échéance à la date *T* et que durant la vie de l'option, le cours de l'action peut progresser S_0u ou diminuer S_0d

avec $u>1$ et $\mathrm{d}<1$

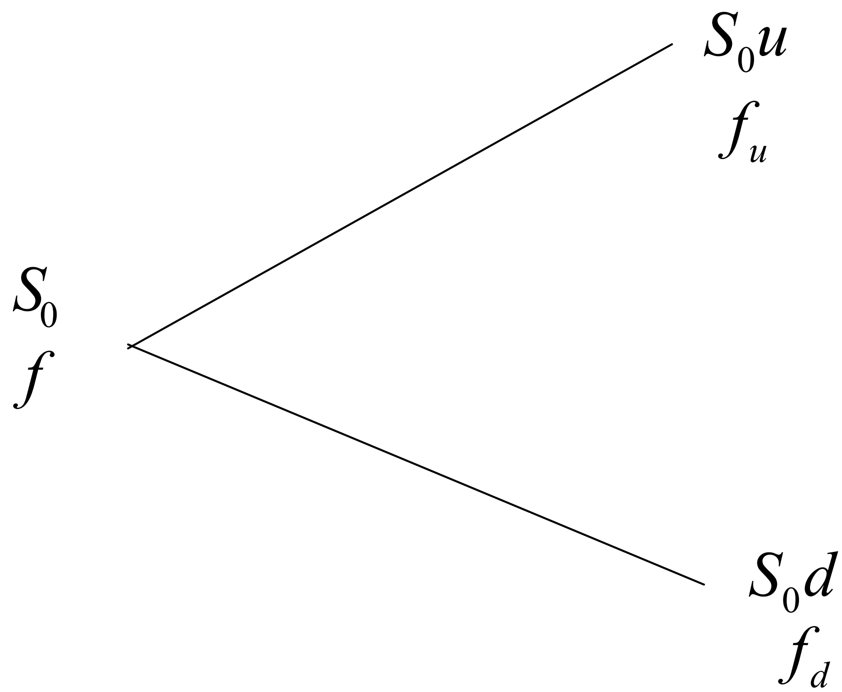
En cas de hausse l'action a une rentabilité de $u-1$

Et en cas de baisse, elle a une rentabilité de $d-1$

Notons f_u le payoff de l'option si le cours de l'action atteint S_0u

Et f_d son payoff si le cours de l'option atteint S_0d

Modèles discrets : généralisation



Soit un portefeuille avec une position longue sur Δ actions et une position courte sur une option.

En cas de hausse du cours de l'action , la valeur du portefeuille à l'échéance de l'option est: $S_0 u\Delta - f_u$

En de baisse du cours de l'action, la valeur du portefeuille devient: $S_0 d\Delta - f_d$

Pour un portefeuille sans risque $S_0 u\Delta - f_u = S_0 d\Delta - f_d$

Soit $$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d}$$

En l'absence d'arbitrage la rémunération de ce portefeuille sans risque doit être égale au taux sans risque.
Si on note r le taux sans risque, alors la valeur actuelle du portefeuille est : $(S_0 u\Delta - f_u)e^{-rT}$

Le coût de constitution du portefeuille est: $S_0\Delta - f$

On en déduit que $S_0\Delta - f = (S_0 u\Delta - f_u)e^{-rT}$

Soit $f = S_0\Delta(1 - ue^{-rT}) + f_u e^{-rT}$

En remplaçant Δ par sa valeur et en simplifiant on obtient: $f = e^{-rT}\left[pf_u + (1-p)f_d\right]$

Avec $p = \dfrac{e^{rT} - d}{u - d}$

Ces deux équations permettent l'évaluation d'une option par un modèle binomial à une période.

Dans l'exemple précédent:

$$f_u = 1 ; f_d = 0 ; u = 1.1 ; d = 0.9 ; r = 0.12 ; T = 0.25$$

$$p = \frac{e^{0.12\times\frac{3}{12}} - 0.9}{1.1 - 0.9} = 0.6523$$

$$f_u = 1 \ ; \ f_d = 0 \ ; \ u = 1.1 \ ; \ d = 0.9 \ ; \ r = 0.12 \ ; T = 0.25$$

$$p = \frac{e^{0.12 \times \frac{3}{12}} - 0.9}{1.1 - 0.9} = 0.6523$$

En appliquant la formule précédente on obtient:

$$f = e^{-0.12 \times 0.25}\left[0.6523 \times 1 + 0.3457 \times 0\right] = 0.633$$

Modélisation

Généralisation : Soient deux impulsions u et d, avec u>1 et d<1 (l'accroissement proportionnel est donc u-1). La Valeur du portefeuille est par définition identique dans les deux cas de figure (hausse et baisse du titre) et elle est la suivante :

$$S_0 u\,\Delta - C_u \quad = \quad S_0\, d\,\Delta - C_d$$

Si il y hedging parfait, les deux valeurs sont identiques et alors :

$$\boldsymbol{\Delta = (C_u - C_d)/(S_0 u - S_0 d) = (C_u - C_d)/S_0(u-d) \quad (Eq.1)}$$

Modélisation

$\Delta = (C_u - C_d)/(S_0u - S_0d)$

-Ce Δ mesure la différence de valeur du prix de l'option en fonction des variations de valeurs de l'actif sous jacent. Il joue un rôle important que vous avez déjà apprécié. Il s'agit d **'un ratio de couverture.**

-La valeur présente ou actuelle du portefeuille est :

$(S_0u\,\Delta - C_u)\exp(-rT)$

Le cout initial du portefeuille:

$S_0\,\Delta - C$

D'où, après réarrangement :

$C = S_0\,\Delta - (S_0u\,\Delta - C_u)\exp(-rT)$ (Eq.2)

Modélisation

En substituant dans l'expression précédente la valeur de Δ obtenue dans l'équation 1, et en vous souvenant que

exp(-rT)*exp(rT)=exp(0)=1, on a :

$C=\exp(-rT)[pC_u+(1-p)\ C_d]$ (Eq2 ')

Avec :

p= [(exp(rT)-d)/(u-d)]

Modélisation

Avec les valeurs numériques **précédentes**

($u=1,1$ $d=0,9$ $r=12\%$, $T=0,25$ $C_u=1$ et $C_d=0$)

alors :

p= 0,6523

C= 0,633

Modélisation

Remarque fondamentale:

-Il est remarquable que les probabilités de hausse ou de baisse ne sont pas en jeu. C'est comme si on avait un billet de loterie valant le même prix que la probabilité de gagner soit de 1/100 ou de 1/100000!!!!

-La raison (absolument essentielle et qui va s'expliquer dans la théorie de l'évaluation risque neutre) est que l'évaluation du call est faite en termes absolus : *Nous calculons la valeur de l'actif dérivé en terme de prix de l'actif sous jacent. C'est un problème de numéraire.*

Les probabilités sont « incorporées » dans le prix de l'action.

Cependant si les deux valeurs terminales de l'action sont fixées et si la proba de hausse passe de 50 à 90% la valeur initiale de l'action augmente ce qui changera « u » et « d » et donc le prix de l'option. ; l'effet est ici neutralisé par une variation en terme de prix du sous jacent.

Mais lire P.Roger à ce sujet….

Modélisation

Evaluation risque neutre :

Il est possible de procéder à une évaluation dite risque-neutre, l'autre méthode alternative d'évaluation.

Il est naturel en effet d'interpréter « p » dans l'équation 2 et 2 ' en terme de probabilité, utilisée donc dans ce qui est formellement une espérance mathématique.

Calculons le rendement espéré de l'action si on fait l'hypothèse qu'un mouvement de hausse est affecté d'une probabilité p:

$E(S_T) = pS_0 u + (1-p)S_0 d$

soit encore :

$E(S_T) = pS_0 (u-d) + S_0 d$

Soit en utilisant la définition mathématique de « p » des slides précédents :

$\mathbf{E(S_T) = S_0 \exp(rT)}$

Modélisation

Commentaires :

-Le prix de l'action croît en moyenne au taux sans risque; en écrivant la probabilité d'un mouvement de hausse égale à « p », on dit qu 'il est équivalent de supposer que le rendement de l'action vaut le taux d'intérêt sans risque.

-Dans un monde risque neutre, tous les individus sont indifférents au risque ; ils ne demandent rien pour le risque; la valeur d'une option est alors son payoff escompté au taux sans risque.

-Le résultat est valable même si on abandonne l'hypothèse de risque/neutralité

Modélisation

Evaluation risque neutre et AOA

L'évaluation risque neutre donne le même calcul que l'argument AOA.

Dans un monde R-neutre, avec une probabilité de hausse « p », le rendement espéré de l'action (taux sans risque 12%) vaut :

22p+18(1-p) =20exp (0.12*0.25)

d'où p=0.6523

Dans ces conditions, la Valeur anticipée de l'option est :

0.6523 *1+0.3477*0= 0.6523

ce qui escompté à 12% vaut :

0.6523*exp(-12%*0.25)=0.6333

- Cette dernière égalité achève de démontrer que les deux méthodes de AOA et Risk neutre aboutissent au même résultat.

- Comment comparer monde réel et monde risque-neutre ? Supposons que le rendement de l'action soit de 16% et « q » la proba de hausse. On a alors :
  - 22q+18(1-q) = 20exp 0.16 *3/12

Alors q= 0.7041 et donc le pay off égale q*1+(1-q)*0= 0.7041

Calculons le taux d'actualisation implicite à partir de la valeur correcte de l'option : 0.633 =0.7041 exp(-0.42*3/12)

Il s'établit donc à …42%

Le problème est qu'il n'est pas facile de connaître le taux d'escompte correct à appliquer dans le mondé réel ; seule l'hypothèse d'une évaluation risque neutre est justifiable.

Modèle de Black-Scholes Merton

- Le modèle de BS: généralités:
  - L'équation de BS est une équation vérifiée par le prix de n'importe quel actif dérivé dépendant d'une action ne payant pas de dividende.
  - Les arguments pour aboutir à cette équation sont :
    - analyse en termes de nonarbitrage, analogue aux modèles binomiaux, où on compose un portefeuille avec un dérivé et un ss jacent
    - notion de portefeuille sans risque et de risque sous jacent affectant à la fois l'action et le dérivé
    - Le rendement du portefeuille sans risque doit toujours être le taux sans risque, les positions perdante et gagnantes se compensant

Modèle de Black-Scholes Merton

- Le modèle de BSM
  - Hypothèses générales :
    - processus de prix des actions
    - ventes à découvert permises
    - pas de couts de transaction
    - pas de dividendes
    - AOA
    - le trading d 'actifs est continu
    - le taux d 'intérêt est constant

Modèle de Black-Scholes Merton

- La démonstration de Black Scholes sera faite en cours, du moins espère-je…

- LES ETAPES A RETENIR:

- On se donne le processus du prix de l'action
- On pose une équation différentielle très générale
- On constitue un portefeuille « approprié» de telle sorte que la partie stochastique s'efface (-1 call et dc/dS actions)

Modèle de Black-Scholes Merton

- On calcule la variation de la valeur du portefeuille en un intervalle de temps « dt »
- On trouve une équation différentielle non stochastique, essentielle car on la retrouve dans tous les modèles
- On se souvient qu'il existe des conditions aux bornes C=max (S-X,0) quand t=T
- On se débrouille pour résoudre!

Modèle de Black-Scholes Merton

- Les formules de BS pour call et put européens

$$c = S_0 N\left(d_1\right) - X\, exp(-rT)\, N\left(d_2\right)$$

$$p = X\, exp(-rT)\, N\left(-d_2\right) - S_0 N\left(-d_1\right)$$

$$avec :$$

$$d_1 = \frac{ln \frac{S_0}{X} + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Les dérivés comme couverture

- La gestion du risque de change
  - Ne pas se couvrir
  - Se couvrir en utilisant des contrats à terme fermes
  - Se couvrir en utilisant des options
- Pas de stratégie dominante : fonctions des objectifs du trésorier et des anticipations

Les dérivés comme couverture

- La gestion du risque de taux
  - Ne pas se couvrir
  - Se couvrir en utilisant un floor ou un cap
  - Se couvrir en utilisant des swaps

Les dérivés comme outils de spéculation

- L’effet de levier
- Les combinaisons d’options
- Le trading de volatilité : lorsque la volatilité évolue, l’investisseur peut racheter(revendre) ses options avant échéance avec profit

Organisation des marchés dérivés

- Points à retenir :
  - Standardisation des contrats dans le monde et renforcement des procédures de sécurité
  - Explosion des quantités tradées sur les marchés organisés et sur le gré à gré
  - Un bon exemple de rationalisation : euronext et Liffe
  - Sources statistiques à consulter obligatoirement : euronext et BRI

Conclusion générale

- Pas de théorie générale de la finance de marché, mais on s'en approche peut-être …
- Caractéristique commune : la mathématisation et la rigueur des méthodes d'évaluation
- Perméabilité des deux domaines de la finance : les outils commencent à se ressembler : cf annexe sur le modèle de Modigliani Miller

Conclusion générale

- La finance d’entreprise est iconostase
- la finance de marché est hypostase.