Brevet de technicien supérieur
Comptabilité et gestion des organisations session 2007

Exercice 1 **10 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Un atelier d'assemblage de matériel informatique s'approvisionne en pièces d'un certain modèle.

A. Évènements indépendants et probabilités conditionnelles

L'atelier reçoit ce modèle de pièces en grande quantité. Chaque pièce peut présenter deux défauts que l'on appelle défaut a et défaut b.
On prélève une pièce au hasard dans une importante livraison.
On note A l'évènement : « l'appareil présente le défaut a » et on note B l'évènement : « l'appareil présente le défaut b ».
On admet que les probabilités des évènements A et B sont $P(A) = 0,02$ et $P(B) = 0,01$.
On suppose que les deux évènements A et B sont indépendants.

1. Calculer la probabilité de l'évènement E_1 : « la pièce présente le défaut a et le défaut b ».
2. Calculer la probabilité de l'évènement E_2 « la pièce est défectueuse, c'est-à-dire qu'elle présente au moins un des deux défauts ».
3. Calculer la probabilité de l'évènement E_3 : « la pièce ne présente aucun défaut ».
4. Calculer la probabilité que la pièce présente les deux défauts sachant qu'elle est défectueuse. Arrondir à 10^{-4}.

Dans ce qui suit, tous les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}

B. Loi binomiale

On note D l'évènement : « une pièce prélevée au hasard dans un stock important esi défectueuse ».
On suppose que $P(D) = 0,03$.
On prélève au hasard 200 pièces dans le stock pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 200 pièces.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 200 pièces, associe le nombre de pièces de ce prélèvement qui sont défectueuses.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que dans un tel prélèvement ii y ait exactement une pièce défectueuse.
3. Calculer la probabilité que dans un tel prélèvement il y ait au moins deux pièces défectueuses.

C. Loi normale

On s'intéresse maintenant à la masse de ces pièces.
On note Y la variable aléatoire qui à chaque pièce prélevée au hasard dans un lot important associe sa masse en grammes.
On suppose que la variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne 500 et d'écart type 4.

1. Calculer $P(Y \leqslant 510)$.
2. Une pièce de ce modèle est acceptable pour la masse lorsque celle-ci appartient à l'intervalle $[490 ; 510]$. Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard soit acceptable pour la masse.

Exercice 2 **10 points**

A. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = 4 - \mathrm{e}^{-x}(x+2)^2.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On prend comme unités : 1 cm pour 1 sur l'axe des abscisses et 2 cm pour 1 sur l'axe des ordonnées.

1. **a.** On admet que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}(x+2)^2 = 0$; en déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

   b. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.
2. **a.** Démontrer que pour tout réel x de $[0 ; +\infty[$, $f'(x) = x(x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout réel x de $[0 ; +\infty[$. Établir le tableau de variations de la fonction f.
3. Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-2}.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$									

4. Construire la droite Δ et la courbe $\mathscr{C}$ sur une feuille de papier millimétré.

B. Calcul intégral

1. **a.** Soient g et h les fonctions définies sur $[0 ; +\infty[$ respectivement par :

$$g(x) = -\mathrm{e}^{-x}(x+2)^2 \text{ et } h(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(x^2+6x+10\right).$$

   Démontrer que h est une primitive de g sur $[0 ; +\infty[$.

   b. Déduire du **1. a.** une primitive F de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$.
2. **a.** Démontrer que la valeur moyenne de f sur $[0 : 8]$ est $V_m = \dfrac{11+61\mathrm{e}^{-8}}{4}$.

   b. Donner la valeur approchée, arrondie à 10^{-2}, de V_m.

C, Application économique

Depuis le premier janvier 1999 une entreprise fabrique un produit noté P. Ce produit a été commercialisé dans une ville comportant 40 000 foyers acheteurs potentiels.

On admet que le nombre de foyers équipés du produit P le premier janvier de l'année $(1999 + n)$ est égal à $10\,000 \times f(n)$, où f est la fonction définie dans la partie A.

1. Déterminer le pourcentage de foyers équipés du produit P le premier janvier 2007 parmi les foyers acheteurs potentiels. Arrondir à 1 %.
2. Déterminer le nombre de foyers qui se sont équipés entre le premier janvier 2001 et le premier janvier 2002.